



1763

De integratione aequationum differentialium

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De integratione aequationum differentialium" (1763). *Euler Archive - All Works*. 269.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/269>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

DE
I N T E G R A T I O N E
A E Q V A T I O N V M D I F F E R E N T I A L I V M.

Auctore
L. E V L E R O.

I.

Considero hic aequationes differentiales primi gradus, quae duas tantum variables inuoluunt, quas propterea sub hac forma generali $M dx + N dy = 0$, repraesentare licet, si quidem M et N denotent functiones quascunque binarum variabilium x et y . Demonstratum autem est, huiusmodi aequationem semper certam relationem inter variables x et y exprimere, qua pro quouis valore unius certi valores pro altera definiantur. Cum autem per integrationem ista relatio finita inter ambas variables inueniri debeat, aequatio integralis, si quidem ad omnem amplitudinem extendatur, nouam quantitatem constantem recipiet, quae, dum penitus ab arbitrio nostro pendet, infinitas quasi aequationes integrales complectitur, quae omnes aequationi differentiali aequae conueniant.

2. Proposita igitur huiusmodi aequatione differentiali quacunque $M dx + N dy = 0$, tota vis Analyseos in hoc consistit, ut aequatio finita inter easdem variables

biles x et y eliciatur, quae eandem inter illas relationem exprimat, atque ipsa differentialis, et quidem latissimo sensu, ita ut constantem quampiam arbitrariam, quae in differentiali non inest, contineat. Verum si haec quaestio ita generalissime proponatur, nulla plane adhuc inuenta est via ad eius solutionem perueniendi; atque omnes casus, quos adhuc resolvere licuit, ad numerum perquam exiguum reduci possunt, ita ut in hac Analyseos parte, perinde ac in reliquis, maxima adhuc incrementa desiderentur; neque ob hanc causam unquam plena omnium huius scientiae arcanorum cognitio expectari queat.

3. Quae quidem adhuc in hoc negotio sunt praestita, ea fere omnia ad hos casus referri possunt, quibus aequatio differentialis $Mdx + Ndy = 0$, vel sponte separationem variabilium admittit, vel per idoneas substitutiones ad talem formam reduci potest. Quodsi enim introducendis loco x et y binis novis variabilibus v et z , aequatio differentialis proposita in huiusmodi formam $Vdv + Zdz = 0$ transmutari queat, in qua V sit functio ipsius v tantum, et Z ipsius z tantum, totum negotium erit confectum, dum aequatio integralis completa erit:

$$\int Vdv + \int Zdz = \text{Const.}$$

quae manifesto illam constantem arbitrariam, per generalem integrationem inuectam complectitur. Atque huc fere redeunt omnia artificia, quibus Analystae adhuc in resolutione huiusmodi aequationum sunt vsi.

4. Nisi igitur aequatio proposita differentialis sponte separationem variabilium admittat, totum negotium in hoc consumi est solitum, ut idoneae substitutiones, quae ad separationem viam parent, inuestigantur, in quo etiam saepius summam sagacitatem, quam Geometrae ad scopum obtinendum adhibuerunt, admirari oportet. Interim tamen cum nulla certa via pateat, huiusmodi substitutiones inuestigandi, haec methodus minus ad rei naturam videtur accommodata, ex quo constitui, aliam methodum non nouam quidem, verum tamen etiam nunc non satis excultam, accuratius perpendere, quae uti substitutionibus non eget, ita etiam naturae aequationum magis consentanea videtur, dum eius ratio indoli differentialium innititur, tum vero etiam priorem methodum, velut partem, in se complectitur.

5. Aequatione differentiali ad hanc formam $M dx + N dy = 0$ perducta, consideretur formula $M dx + N dy$ sine respectu habito, quod ea euanescere debeat, et examinetur, vtrum ea sit differentiale cuiuspiam functionis ipsarum x et y , nec ne? Quemadmodum hoc examen sit instituendum, iam passim abunde est explicatum; vtramque scilicet functionem M et N differentiari oportet, et cum earum differentialia huiusmodi formam sint habitura:

$$dM = p dx + q dy \text{ et } dN = r dx + s dy$$

dispicatur, vtrum sit $q = r$, nec ne? Quodsi enim fuerit $q = r$, hoc infallibile est criterium, formulam $M dx + N dy$ esse integrabilem: at si non fuerit $q = r$, aequè certum est, istam formulam ex nullius finitae functionis ipsarum x et y differentiatione esse ortam. Ex

quo tota quaestio ad duos casus reducitur, quorum alter locum habet, si fuerit $q=r$, alter vero, si hae quantitates q et r non fuerint inter se aequales.

6. Ad aequalitatem igitur, vel inaequalitatem, quantitatum q et r agnoscendam, ne opus quidem est, ut functiones M et N penitus per differentiationem euoluantur, sed sufficit in functione M , quae cum dx est coniuncta, quantitatem x ut constantem spectare, eamque tantum eius differentialis partem quaerere, quae ex variabilitate ipsius y tantum nascitur, si quidem hoc modo membrum qdy obtinetur, valorem autem ipsius q sic erutum hac scriptione ($\frac{dM}{dy}$) denotare soleo. Simili modo altera functio N , quae cum dy est coniuncta, ita differentietur, ut y pro constante tractetur, et ex variabilitate solius x impetretur differentialis pars $r dx$, ubi valorem ipsius r pariter per ($\frac{dN}{dx}$) exprimo. Quodsi ergo formula $M dx + N dy$ ita fuerit comparata, ut sit ($\frac{dM}{dy}$) = ($\frac{dN}{dx}$), ea est integrabilis, eiusque integrale sequenti modo inueniri poterit. Quo facto, si hoc criterium non locum habeat, videamus quomodo sit procedendum.

Problema I.

7. Si aequatio differentialis $M dx + N dy = 0$ ita fuerit comparata, ut sit ($\frac{dM}{dy}$) = ($\frac{dN}{dx}$), inuenire eius aequationem integram.

Solutio.

Si fuerit ($\frac{dM}{dy}$) = ($\frac{dN}{dx}$), tunc datur functio finita binarum variabilium x et y , quae differentiata praebet

bet $Mdx + Ndy$. Sit V ista functio, et cum sit $dV = Mdx + Ndy$, erit Mdx differentiale ipsius V , si tantum x variabile sumatur, et Ndy eius differentiale, si tantum y variabile capiatur. Hinc ergo vicissim V reperietur, si vel Mdx integretur, spectata y vt constante, vel Ndy integretur, spectata x vt constante: sicque haec operatio reducitur ad integrationem formulae differentialis vnicam variabilem inuoluentis, quae in hoc negotio, siue algebraice succedat, siue quadraturas curuarum requirat, concedi postulatur. Cum autem hac ratione quantitas V duplici modo inueniatur, et altera integratio vice constantis functionem quamcunque ipsius y , altera vero ipsius x assumat, ita vt sit

$$\text{et } V = \int Mdx + Y, \text{ et } V = \int Ndy + X,$$

semper has functiones Y ipsius y , et X ipsius x , ita definire licet, vt fiat $\int Mdx + Y = \int Ndy + X$, id quod quouis casu facile praestatur. Quo facto cum quantitas V sit integrale formulae $Mdx + Ndy$, euident est, aequationis propositae $Mdx + Ndy = 0$ integralem aequationem fore $V = \text{Const.}$ eamque completam, propterea quod inuoluit constantem quantitatem ab arbitrio nostro pendentem.

Coroll. 1.

3. In hoc problemate statim continetur casus aequationum separatarum. Si enim fuerit M functio ipsius x tantum, et N functio ipsius y tantum, erit vtique $(\frac{dM}{dy}) = 0$ et $(\frac{dN}{dx}) = 0$; ideoque $(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dN}{dx})$; qui est ergo casus simplicissimus, quem problema in se complectitur.

Coroll.

Coroll. 2.

9. Quodsi autem in aequatione differentiali $Mdx + Ndy = 0$ fuerit M functio solius x , et N solius y , utraque pars seorsim integrabilis existit, atque aequatio integralis erit:

$$\int Mdx + \int Ndy = \text{Const.}$$

Coroll. 3.

10. Praeterea vero nostrum problema resolutionem infinitarum aliarum aequationum differentialium largitur, quarum omnium character communis in hoc consistit, ut sit $(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dN}{dx})$, earumque resolutio per integrationem formularum, unicam variabilem continentium, expediri potest.

Scholion 1.

11. Quoties ergo in aequatione differentiali $Mdx + Ndy = 0$ fuerit $(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dN}{dx})$, eius resolutio nullam habet difficultatem, dummodo integratio formularum unicam variabilem inuoluentium concedatur; quam quidem iure postulare licet. Interim tamen determinatio functionum illarum X et Y , quae loco constantium introduci debent, molestiam quandam creare videri posset, quae autem singulis casibus mox euanescere reperietur. Verum quo magis et haec operatio contrahatur, ne duplici quidem integratione est opus. Postquam enim altera pars Mdx , inspectata y tanquam constanti, fuerit integrata, quod integrale sit $= Q$, statuatur $V = Q + Y$, posito tantisper Y pro functione inde-

indefinita ipsius y , in quam altera variabilis x prorsus non ingrediatur. Tum differentietur denuo haec quantitas $Q+Y$, tractando x tanquam constantem, et quia differentiale prodire debet $=Ndy$, ex hac conditione functio Y facillime definietur, quandoquidem ex rei natura hinc sponte eliminabitur quantitas x . Inuenta autem ista functione Y , aequatio integralis erit $Q+Y=Const.$ quam operationem sequentibus exemplis illustrari conveniet.

Exemplum 1.

12. Integrare hanc aequationem differentialem :

$$2axydx + axxdy - y^2dx - 3xyydy = 0.$$

Comparata hac aequatione cum forma $Mdx + Ndy = 0$, erit :

$$M = 2axy - y^2 \text{ et } N = axx - 3xyy.$$

Primum igitur dispiciendum est, vtrum hic casus in problemate contineatur? quem in finem quaeramus valores :

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 2ax - 3yy, \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = 2ax - 3yy,$$

qui cum sint aequales, operatio praescripta necessario succedet. Reperietur autem, sumta y pro constante :

$$\int Mdx = axxy - y^2x + Y;$$

cuius formae si differentiale sumatur, posita x constante, prodibit :

$$axxdy - 3yyxdy + dY = Ndy,$$

et pro N valore suo $axx - 3xyy$ restituto, fiet $dY = 0$, ex quo nascitur $Y = 0$, vel $Y = const.$ Quare aequatio integralis quaesita habebitur :

$$axxy - y^2x = Const.$$

Tom. VIII. Nou. Comm.

B

Exem-

Exemplum 2.

13. Integrare hanc aequationem differentialem:

$$\frac{y dy + x dx - 2y dx}{(y-x)^2} = 0$$

Comparata hac aequatione cum forma $Mdx + Ndy = 0$, erit:

$$M = \frac{x - 2y}{(y-x)^2} \text{ et } N = \frac{y}{(y-x)^2}$$

Iam ut pateat, num haec aequatio in casu problematis contineatur, quaerantur valores differentiales:

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{2y}{(y-x)^3} \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2y}{(y-x)^3}$$

qui cum sint aequales, negotium succedet. Quare secundum regulam colligatur, sumto y constante, integrale:

$$\int M dx = \int \frac{x dx - 2y dx}{(y-x)^2} = -\int \frac{dx}{y-x} - \int \frac{y dx}{(y-x)^2}$$

ac reperietur:

$$\int M dx = l(y-x) - \frac{y}{y-x} + Y$$

cuius differentiale, sumto x constante, producere debet alteram aequationis propositae partem Ndy ; unde habebitur:

$$Ndy = \frac{dy}{y-x} + \frac{x dy}{(y-x)^2} + dY = \frac{y dy}{(y-x)^2} + dY.$$

Cum igitur sit $Ndy = \frac{y dy}{(y-x)^2}$ et $dY = 0$, et $Y = 0$, constantem enim in Y negligere licet, quia iam in aequationem integram introducit, quippe quae erit:

$$l(y-x) - \frac{y}{y-x} = \text{Const.}$$

Exemplum 3.

14. Integrare hanc aequationem differentialem:

$$\frac{dx}{x} + \frac{yy dx}{x^2} - \frac{y dy}{xx} + \frac{(y dx - x dy)\sqrt{(xx + yy)}}{x^2} = 0$$

Com-

AEQUATIONVM DIFFERENTIALIVM. 11

Comparata hac aequatione cum formâ $Mdx + Ndy = 0$, habebimus :

$$M = \frac{xx + yy + y\sqrt{xx + yy}}{x^3} \text{ et } N = \frac{-y - \sqrt{xx + yy}}{xx}$$

unde pro criterio explorando quaeratur :

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{\sqrt{xx + yy}}{x^3} + \frac{yy}{x^3\sqrt{xx + yy}} \text{ et}$$

$$\left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{2\sqrt{xx + yy}}{x^3} - \frac{xx + 2yy}{xx\sqrt{xx + yy}}$$

qui valores reducti cum fiant aequales, scilicet

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dN}{dy}\right) = \frac{2y}{x^3} + \frac{xx + 2yy}{x^3\sqrt{xx + yy}}$$

resolutio erit in potestate. Inuestigetur ergo, sumto y constante :

$$\int Mdx = lx - \frac{yy}{2xx} + y \int \frac{dx}{x^3} \sqrt{xx + yy}.$$

At per regulas integrandi, formulas unicam variabilem inuoluentes, quia hic y pro constante habetur, reperitur :

$$\int \frac{y dx}{x^3} \sqrt{xx + yy} = \frac{-y\sqrt{xx + yy}}{2xx} + \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{xx + yy} - y}{y}$$

ita ut sit :

$$\int Mdx = lx - \frac{yy}{2xx} - \frac{y\sqrt{xx + yy}}{2xx} + \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{xx + yy} - y}{y} + Y$$

At huius quantitatis differentiale, assumto x pro constante, quia praebere debet $Ndy = -\frac{y dy - dy\sqrt{xx + yy}}{xx}$, nanciscemur :

$$Ndy = \frac{-y dy}{xx} - \frac{dy\sqrt{xx + yy}}{2xx} - \frac{yy dy}{2xx\sqrt{xx + yy}} - \frac{dy}{2y} - \frac{dy}{2\sqrt{xx + yy}} + dY$$

qua forma cum illa comparata fiet :

$$dY = -\frac{dy\sqrt{xx + yy}}{2xx} + \frac{yy dy}{2xx\sqrt{xx + yy}} + \frac{dy}{2y} + \frac{dy}{2\sqrt{xx + yy}}$$

vbi termini, qui adhuc continent x , sponte se destruunt, ita ut sit $dY = \frac{dy}{2y}$ et $Y = \frac{1}{2} ly$. Quo valore pro Y inuento, obtinebitur aequatio integralis quaesita :

$$lx - \frac{yy}{2xx} - \frac{y\sqrt{xx + yy}}{2xx} + \frac{1}{2} l(V(xx + yy) - y) = \text{Const.}$$

B 2

Scho-

Scholion 2.

15. Ex his exemplis satis perspicitur, quemadmodum perpetuo operatio praescripta sit instituenda, ita ut hinc nulla amplius difficultas molestiam facessat, nisi quae ex integratione formularum, unicam variabilem involuentium, quandoque relinquitur, dum integratio neque algebraice absolui, neque ad circuli hyperbolaeue quadraturam reduci patitur. Verum tum superiores quadraturas simili modo tractari oportet, et si quae difficultates relinquantur, eae non huic methodo sunt adscribendae. Quam ob rem hic assumere licet, quoties aequatio differentialis $Mdx + Ndy = 0$ ita fuerit comparata, ut in ea sit $(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dN}{dx})$, toties integrationem esse in nostra potestate; unde ad eas aequationes pergo, in quibus hoc criterium non habet locum.

Theorema.

16. Si in aequatione differentiali $Mdx + Ndy = 0$ non fuerit $(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dN}{dx})$, semper datur multiplicator, per quem formula $Mdx + Ndy$ multiplicata fiat integrabilis.

Demonstratio.

Cum non sit $(\frac{dM}{dy}) = (\frac{dN}{dx})$, etiam formula $Mdx + Ndy$ non erit integrabilis, seu nulla existit functio ipsarum x et y , cuius differentiale sit $Mdx + Ndy$. Verum hic non tam formulae $Mdx + Ndy$, quam aequationis $Mdx + Ndy = 0$, quaeritur integrale; et cum eadem aequatio subsistat, si per functionem quam-

quamcunque L ipsarum x et y multiplicetur, ita ut fit $LMdx + LNd y = 0$, demonstrandum est, semper eiusmodi dari functionem L , ut formula $LMdx + LNd y$ fiat integrabilis. Quo enim hoc eueniat, necesse est, ut fit:

$$\left(\frac{dLM}{dy}\right) = \left(\frac{dLM}{dx}\right)$$

vel si ponatur $dL = Pdx + Qdy$, cum fit $\left(\frac{dL}{dy}\right) = Q$, et $\left(\frac{dL}{dx}\right) = P$, functio L ita debet esse comparata, ut fit:

$$L\left(\frac{dM}{dy}\right) + MQ = L\left(\frac{dN}{dx}\right) + NP.$$

Euidens autem est, hanc conditionem sufficere ad definiendam functionem L , per quam si formula $Mdx + Nd y$ multiplicetur, fiat integrabilis.

Coroll. 1.

17. Inuento ergo tali multiplicatore L , qui redat formulam $Mdx + Nd y$ integrabilem, aequatio $Mdx + Nd y = 0$, in formam $LMdx + LNd y = 0$ translata, integrari poterit methodo in problemate praecedente exposita.

Coroll. 2.

18. Quaeratur scilicet, spectata y tanquam constante, integrale $\int LMdx$, ad quod adiiciatur talis functio Y ipsius y , ut si aggregatum $\int LMdx + Y$ denuo differentietur, spectata iam x ut constante, prodeat $LNd y$. Quo facto erit aequatio integralis $\int LMdx + Y = \text{Const.}$

Coroll. 3.

19. Multiplicator igitur L ita debet esse comparatus, vt posito $dL = Pdx + Qdy$, satisfiat huic aequationi:

$$L\left(\frac{dM}{dy}\right) + MQ = L\left(\frac{dN}{dx}\right) + NP$$

vel huic:

$$\frac{NP - MQ}{L} = \left(\frac{dM}{dy}\right) - \left(\frac{dN}{dx}\right)$$

vnde manifestum est, si effiet $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, pro L sumi posse vnitatem, vel quantitatem constantem quamcunque, dum sit $P = 0$, et $Q = 0$.

Scholion.

20. Si ergo hinc in genere multiplicator L inveniri posset, haberetur vniuersalis resolutio omnium aequationum differentialium primi gradus; id quod ne sperare quidem licet. Contentos ergo nos esse oportet, si pro variis casibus, pluribusque aequationum differentialium generibus, huiusmodi factores inuestigare valeamus. Sunt autem duo aequationum genera, pro quibus tales factores commode erui possunt, quorum alterum eas comprehendit aequationes, in quibus altera variabilis nusquam vltra vnam dimensionem exsurgit; alterum vero genus est aequationum homogenearum. Praeter haec vero duo genera plures alii existunt casus, quibus inuentio talis factoris absolui potest, quos diligentius examinasse, vsu non carebit, cum haec sola via patere videatur ad eam Analyseos partem, quae adhuc desideratur, excolendam ac perficiendam. Quam
ob

ob rem hic constitui, plura aequationum genera colligere, quae per huiusmodi multiplicatorem ad integrabilitatem perducī possunt.

Problema 2.

21. Cognito vno multiplicatore L , qui formulam $Mdx + Ndy$ integrabilem reddit, inuenire infinitos alios multiplicatores, qui idem officium praestent.

Solutio.

Cum formula $L(Mdx + Ndy)$ per hypothesin sit integrabilis, sit eius integrale $=z$, ita vt sit $dz = L(Mdx + Ndy)$, existente z quapiam functione ipsarum x et y . Denotet iam Z functionem quamcunque ipsius z , et quia formula Zdz est etiam integrabilis, ob $Zdz = LZ(Mdx + Ndy)$, manifestum est formulam propositam $Mdx + Ndy$ quoque fieri integrabilem, si per LZ multiplicetur. Dato ergo vno multiplicatore L , qui formulam $Mdx + Ndy$ integrabilem reddat, ex eo innumerabiles alii factores LZ inueniri possunt, qui idem sint praestituri, sumendo pro Z functionem quamcunque integralis $\int L(Mdx + Ndy)$.

Coroll. 1.

22. Proposita igitur formula differentiali quacunque $Mdx + Ndy$, non solum vnus, sed etiam infiniti dantur multiplicatores, qui eam integrabilem reddant. Quorum autem vnum inuenisse sufficit, cum reliqui omnes per hunc determinentur.

Coroll.

Coroll. 2.

23. Si ergo habeatur aequatio differentialis $Mdx + Ndy = 0$, ea infinitis modis ad integrabilitatem perducere potest. Siue autem capiatur multiplicator L , siue alius quicumque LZ , aequatio integralis inuenta eodem redit; siquidem ille factor L praebet $z = \text{Const.}$ hic vero $\int LZ dz = \text{Const.}$ id quod conuenit cum $\int Z dz$ et sit functio ipsius z .

Exemplum 1.

24. Inuenire omnes multiplicatores, qui reddant hanc formulam $\alpha y dx + \beta x dy$ integrabilem.

Vnus multiplicator hoc praestans in promptu est, scilicet $\frac{1}{xy}$. Sit ergo $L = \frac{1}{xy}$, fiatque $dz = \frac{\alpha y dx + \beta x dy}{xy} = \frac{\alpha dx}{x} + \frac{\beta dy}{y}$, unde integrando prodit $z = \alpha \ln x + \beta \ln y = \ln x^\alpha y^\beta$. Denotet iam Z functionem quamcunque ipsius $z = \ln x^\alpha y^\beta$, hoc est ipsius $x^\alpha y^\beta$, atque omnes multiplicatores quaesiti in hac forma generali $\frac{1}{x^\alpha y^\beta}$ funct. $x^\alpha y^\beta$ continebuntur.

Simpliciores ergo multiplicatores reperientur, si loco functionis potestas quaecunque ipsius $x^\alpha y^\beta$ capiatur; sicque formula $\alpha y dx + \beta x dy$ integrabilis redditur per hunc multiplicatorem latius patentem $x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1}$. Si magis compositi desiderentur, plures huiusmodi utcumque inter se combinari poterunt, ut habeatur $A x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1} + B x^{\alpha m - 1} y^{\beta m - 1}$ etc.

Exem-

Exemplum 2.

25. Inuenire omnes multiplicatores, qui reddunt
hanc formulam differentialem $\alpha x^{\mu-1} y^{\nu} dx + \beta x^{\mu} y^{\nu-1} dy$
integrabilem.

Hic iterum statim se offert vnus multiplicator $L = \frac{1}{x^{\mu} y^{\nu}}$,
qui praebet $dz = \frac{\alpha dx}{x} + \frac{\beta dy}{y}$, vnde fit $z = \alpha \log x - \beta \log y$
 $= \log x^{\alpha} y^{\beta}$. Posito igitur Z pro functione quacunque ipsius $x^{\alpha} y^{\beta}$,
omnes multiplicatores continebuntur in hac expressione
generali $\frac{Z}{x^{\mu} y^{\nu}} = \frac{1}{x^{\mu} y^{\nu}}$ funct. $x^{\alpha} y^{\beta}$. Si loco istius functio-
nis sumatur potestas quaecunque $x^{\alpha n} y^{\beta n}$, innumeri hinc
obtinebuntur multiplicatores, vnico termino constantes $x^{\alpha n - \mu}$
 $y^{\beta n - \nu}$, sumendo pro n numeros quoscunque.

Scholion.

26. Fieri igitur potest, vt duae pluresue huius-
modi formulae differentiales $\alpha x^{\mu-1} y^{\nu} dx + \beta x^{\mu} y^{\nu-1} dy$
communem recipiant multiplicatorem: quod si eueniat
aequatio differentialis, ex huiusmodi formulis, tanquam
membris, composita, integrabilis reddi poterit, dum mul-
tiplicator iste communis adhibetur. Quem casum iam
olim tractatum euoluamus.

Problema 3.

27. Proposita sit ista aequatio differentialis:

$$\alpha y dx + \beta x dy + \gamma x^{\mu-1} y^{\nu} dx + \delta x^{\mu} y^{\nu-1} dy = 0$$

cuius integralem inueniri oporteat.

Tom. VIII. Nou. Comm.

C

Solutio.

Solutio.

Ad multiplicatorem idoneum inueniendum, quo haec aequatio reddatur integrabilis, consideretur vtrumque membrum seorsim. Ac prius quidem membrum $\alpha y dx + \beta x dy$ vidimus integrabile reddi hoc multiplicatore $x^{\alpha n - 1} y^{\beta n - 1}$, iposterius vero membrum $\gamma x^{\mu - 1} y^{\nu} dx + \delta x^{\mu} y^{\nu - 1} dy$ hoc $x^{\gamma m - \mu} y^{\delta n - \nu}$. Quia nunc pro n et m numeros quoscunque accipere licet, hi duo factores ad aequalitatem reduci poterunt; vnde fit

$$\alpha n - 1 = \gamma m - \mu \text{ et } \beta n - 1 = \delta m - \nu$$

ideoque $n = \frac{\gamma m - \mu + 1}{\alpha} = \frac{\delta m - \nu + 1}{\beta}$, hincque obtinetur

$$m = \frac{\alpha \nu - \beta \mu - \alpha + \beta}{\alpha \delta - \beta \gamma} \text{ et } n = \frac{\gamma \nu - \delta \mu - \gamma + \delta}{\alpha \delta - \beta \gamma}$$

His valoribus pro m et n inuentis, iste multiplicator communis dabit hanc aequationem integram:

$$\frac{1}{n} x^{\alpha n} y^{\beta n} + \frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = \text{Const.}$$

Coroll. 1.

28. Haec ergo aequatio integralis semper est algebraica, siquidem pro m et n valores veri reperiantur. Ii igitur tantum casus singulari reductione indigent, quibus numeri m et n vel in infinitum abeunt, vel euanescent.

Coroll. 2.

29. Infiniti autem euadunt ambo numeri m et n , si fuerit $\alpha \delta = \beta \gamma$. Verum hoc casu ipsa aequatio differentialis in duos factores resolvitur, hancque formam acquirit

$$(\alpha y dx + \beta x dy) \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha} x^{\mu - 1} y^{\nu - 1} \right) = 0$$

ideoque

ideoque erit vel $\alpha y dx + \beta x dy = 0$, vel $1 + \frac{\gamma}{\alpha} x^{\mu-1} y^{\nu-1} = 0$, quarum resolutionum neutra difficultate laborat.

Coroll. 3.

30. At si fiat $n=0$, seu $\gamma(\nu-1)=\delta(\mu-1)$, consideretur numerus n , ut valde parvus, et cum sit per seriem convergentem

$x^{\alpha n} = 1 + \alpha n l x + \frac{1}{2} \alpha^2 n^2 (l x)^2 + \text{etc.}$ et $y^{\beta n} = 1 + \beta n l y + \frac{1}{2} \beta^2 n^2 (l y)^2 + \text{etc.}$ erit

$$\frac{1}{n} x^{\alpha n} y^{\beta n} = \frac{1}{n} + \alpha l x + \beta l y = l x^{\alpha} y^{\beta}$$

prima parte $\frac{1}{n}$ in constantem inuoluta. Hoc ergo casu erit aequatio integralis:

$$l x^{\alpha} y^{\beta} + \frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = \text{Const.}$$

Coroll. 4.

31. Statuatur ergo pro hoc casu $\mu = \gamma k + 1$ et $\nu = \delta k + 1$, ut habeatur ista aequatio differentialis:

$$\alpha y dx + \beta x dy + \gamma x^{\gamma k} y^{\delta k + 1} dx + \delta x^{\gamma k + 1} y^{\delta k} dy = 0$$

et cum sit $m = \frac{\alpha \delta k - \beta \gamma k}{\alpha \delta - \beta \gamma} = k$, erit aequatio integralis

$$l x^{\alpha} y^{\beta} + \frac{1}{k} x^{\gamma k} y^{\delta k} = \text{Const.}$$

Coroll. 5.

32. Simili modo si fuerit $m=0$, seu $\alpha(\nu-1) = \beta(\mu-1)$ ob $\frac{1}{m} x^{\gamma m} y^{\delta m} = l x^{\gamma} y^{\delta}$, si ponatur $\mu = \alpha k + 1$ et $\nu = \beta k + 1$, unde fit $n = \frac{\gamma \beta k - \delta \alpha k}{\alpha \delta - \beta \gamma} = -k$; erit huius aequationis

$$\alpha y dx + \beta x dy + \gamma x^{\alpha k} y^{\beta k + 1} dx + \delta x^{\alpha k + 1} y^{\beta k} dy = 0$$

C 2

inte-

integralis

$$-\frac{1}{k}x^{-\alpha k}y^{-\beta k} + \int x^\gamma y^\delta = \text{Const.}$$

Scholion.

33. Neque vero huiusmodi resolutio in membra, quae per eundem multiplicatorem reddantur integrabilia, ad omnis generis aequationes patet. Euenire enim utique potest, ut tota aequatio per quampiam quantitatem multiplicata integrabilis euadat, cum tamen nulla eius pars inde seorsim integrabilis existat, ex quo huic tractationi, qua hic sum usus, non nimis tribui oportet.

Problema 4.

34. Si proposita sit aequatio differentialis

$$Pdx + Qydx + Rdy = 0$$

vbi P, Q et R denotant functiones quascunque ipsius x , ita ut altera variabilis y plus una dimensione non habeat, inuenire multiplicatorem, qui eam reddat integrabilem.

Solutio.

Comparata hac aequatione cum forma $Mdx + Ndy = 0$ erit $M = P + Qy$ et $N = R$, vnde fiet

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = Q \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{dR}{dx}$$

Statuatur iam L pro multiplicatore quaesito, sitque $dL = pdx + qdy$, atque huic aequationi satisfieri oportet

$$\frac{Np - Mq}{L} = Q - \frac{dR}{dx} = \frac{Rp - (P + Qy)q}{L}$$

Cum

Cum iam sit $Q - \frac{dR}{dx}$ functio ipsius x tantum, pro L quoque functio ipsius x tantum accipi poterit, ita vt sit $q=0$, et $dL=pdx$; vnde erit:

$$Q - \frac{dR}{dx} = \frac{R}{L}, \text{ seu } Qdx - dR = \frac{RdL}{L}$$

ideoque $\frac{dL}{L} = \frac{Qdx}{R} - \frac{dR}{R}$. Quare integrando habebitur $L = \int \frac{Qdx}{R} - \int \frac{dR}{R}$, et sumto e pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est unitas, prodit

$$L = \frac{1}{R} e^{\int \frac{Qdx}{R}}$$

Inuento autem hoc multiplicatore erit aequatio integralis:

$$\int \frac{Pdx}{R} e^{\int \frac{Qdx}{R}} + y e^{\int \frac{Qdx}{R}} = \text{Const.}$$

Coroll. 1.

35. Si aequatio habeat formam propositam, ea, antequam hoc modo tractetur, diuidi poterit per R , vt hanc formam induat $Pdx + Qydx + dy = 0$, seu statim assumere licet $R = 1$, quo facto multiplicator erit $e^{\int Qdx}$, et aequatio integralis $\int e^{\int Qdx} Pdx + e^{\int Qdx} y = \text{Const.}$

Coroll. 2.

36. Si ponatur hoc integrale $\int e^{\int Qdx} Pdx + e^{\int Qdx} y = z$, ita vt z sit functio quaecumque amborum variabilium, tum vero Z denotet functionem quamcumque ipsius z ; omnes multiplicatores, qui formulam $Pdx + Qydx + dy$ reddunt integrabilem, in hac forma generali $e^{\int Qdx} Z$ continentur.

Problema 5.

37. Si proposita sit aequatio differentialis:

$$Py^n dx + Qy dx + R dy = 0$$

vbi P, Q et R denotent functiones quascunque ipsius x , inuenire multiplicatorem, qui eam reddat integrabilem.

Solutio.

Erit ergo $M = Py^n + Qy$ et $N = R$, hincque

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = nPy^{n-1} + Q, \text{ et } \left(\frac{dN}{dx}\right) = \frac{dR}{dx}$$

Quare posito multiplicatore quaesito L et $dL = p dx + q dy$, erit ex ante inuentis:

$$\frac{Rp - Py^n q - Qy q}{L} = nPy^{n-1} + Q - \frac{dR}{dx}.$$

Fingatur $L = Sy^m$, existente S functione ipsius x tantum, erit $p = \frac{y^m dS}{dx}$, et $q = mSy^{m-1}$, quibus valoribus substitutis, prodibit:

$$\frac{R dS}{S dx} - mPy^{n-1} - mQ = nPy^{n-1} + Q - \frac{dR}{dx}$$

Quae aequatio vt subsistere possit, sumi debet $m = -n$, ac fiet

$$\frac{R dS}{S dx} = (1-n)Q - \frac{dR}{dx}, \text{ seu } \frac{dS}{S} = \frac{(1-n)Q dx}{R} - \frac{dR}{R}$$

Vnde cum integrando proueniat $S = \frac{1}{R} e^{(1-n) \int \frac{Q dx}{R}}$, erit, ob $m = -n$, multiplicator quaesitus:

$$L = \frac{y^{1-n}}{R} e^{(1-n) \int \frac{Q dx}{R}}$$

et aequatio integralis erit

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} e^{(1-n) \int \frac{Q dx}{R}} + \int \frac{R dx}{R} e^{(1-n) \int \frac{Q dx}{R}} = \text{Const.}$$

Coroll. 1.

Coroll. 1.

38. Si $n=0$, habemus casum ante tractatum aequationis $Pdx + Qydx + Rdy = 0$, quae per multiplicatorem $\frac{1}{R} e^{\int \frac{Qdx}{R}}$ integrabilis redditur; et cuius aequatio integralis est

$$ye^{\int \frac{Qdx}{R}} + \int \frac{Pdx}{R} e^{\int \frac{Qdx}{R}} = \text{Const.}$$

Coroll. 2.

39. At sit $n=1$, ut aequatio differentialis sit:

$$Pydx + Qydx + Rdy = 0$$

multiplicator, ob $1-n=0$, erit $\frac{1}{Ry}$; quo aequatio reducitur ad hanc formam $\frac{Pdx + Qdx}{R} + \frac{dy}{y} = 0$, cuius integralis manifesto est $\int \frac{(P+Q)dx}{R} + \log y = \text{Const.}$

Scholion.

40. Caeterum hoc problema ex antecedente facile deducitur. Diuidatur enim aequatio differentialis proposita per y^n , et habebitur:

$$Pdx + Qy^{1-n}dx + Ry^{-n}dy = 0$$

Ponatur $y^{1-n} = z$, erit $(1-n)y^{-n}dy = dz$, sicque aequatio transiit in hanc:

$$Pdx + Qzdx + \frac{1}{1-n}Rdz = 0$$

quae cum aequatione problematis praecedentis conuenit. Cum igitur hae duae aequationes referendae sint ad casum, quo altera variabilis nusquam ultra vnam dimensionem ascendit, hunc methodo hac per multiplicatores

res expediimus. Pergo itaque ad alterum genus aequationum differentialium homogenearum, quas etiam hac methodo tractari posse constat. Ad hoc autem lemma, quo natura functionum homogenearum continetur, praemitti necesse est, si quidem operationem ex primis principiis petere velimus.

Lemma.

41. Si V fuerit functio homogenea, in qua binae variables x et y vbique n dimensiones constituent, eius differentiale $dV = Pdx + Qdy$ ita erit comparatum, ut sit $Px + Qy = nV$.

Demonstratio.

Ponatur $y = xz$, et functio V induet huiusmodi formam $x^n Z$, existente Z quapiam functione ipsius z tantum. Hinc ergo erit $dV = nx^{n-1} Z dx + x^n dZ$. Ad has duas variables x et z etiam differentiale propositum $dV = Pdx + Qdy$ reducatur, et cum sit $dy = zdx + xdz$, erit

$$dV = (P + Qz)dx + Qxdz$$

necesse igitur est, ut sit $nx^{n-1} Z = P + Qz$, et per x vtrinque multiplicando: $nx^n Z = nV = Px + Qxz = Px + Qy$: ita ut sit $Px + Qy = nV$.

Coroll. I.

42. Quia ergo habemus duas aequationes:
 $dV = Pdx + Qdy$, et $nV = Px + Qy$

hinc

hinc ambae functiones P et Q definiri poterunt; reperiatur enim:

$$P = \frac{y \frac{dV}{dx} - nV \frac{dy}{dx}}{y \frac{dV}{dx} - nV \frac{dy}{dx}} \text{ et } Q = \frac{nV \frac{dx}{dy} - x \frac{dV}{dy}}{y \frac{dV}{dx} - nV \frac{dy}{dx}}.$$

Coroll. 2.

43. Quoties ergo V est functio homogenea n dimensionum, toties ob $P = (\frac{dV}{dx})$ et $Q = (\frac{dV}{dy})$ erit

$$(\frac{dV}{dx}) = \frac{y \frac{dV}{dx} - nV \frac{dy}{dx}}{y \frac{dV}{dx} - nV \frac{dy}{dx}} \text{ et } (\frac{dV}{dy}) = \frac{nV \frac{dx}{dy} - x \frac{dV}{dy}}{y \frac{dV}{dx} - nV \frac{dy}{dx}}$$

vbi notandum est, in his fractionibus differentialia se mutuo tollere, seu vtrumque numeratorem fore per $y \frac{dx}{dy} - x \frac{dy}{dx}$ divisibilem.

Problema 6.

44. Proposita aequatione differentiali $M dx + N dy = 0$, in qua M et N sint functiones homogeneae ipsarum x et y eiusdem ambae dimensionum numeri, inuenire multiplicatorem, qui eam aequationem reddat integrabilem.

Solutio.

Sit n numerus dimensionum, vtrique functioni M et N conueniens, eritque per §. praec.

$$(\frac{dM}{dy}) = \frac{nM \frac{dx}{dy} - x \frac{dM}{dy}}{y \frac{dx}{dy} - x \frac{dy}{dx}} \text{ et } (\frac{dN}{dx}) = \frac{y \frac{dN}{dx} - nN \frac{dy}{dx}}{y \frac{dx}{dy} - x \frac{dy}{dx}}$$

ideoque

$$(\frac{dM}{dy}) - (\frac{dN}{dx}) = \frac{n(M \frac{dx}{dy} + N \frac{dy}{dx}) - x \frac{dM}{dy} - y \frac{dN}{dx}}{y \frac{dx}{dy} - x \frac{dy}{dx}}.$$

Iam facile colligere licet, dari multiplicatorem, qui etiam sit functio homogenea ipsarum x et y. Sit ergo L talis

Nou. Comm. Tom. VIII.

D

functio

functio homogenea m dimensionum. Quare si in §. 19 ponatur $dL = Pdx + Qdy$, erit (42.)

$$P = \frac{y dL - mL dy}{y dx - x dy}, \text{ et } Q = \frac{m L dx - x dL}{y dx - x dy}.$$

hincque, cum esse oporteat per §. 19.

$$\frac{NP - MQ}{L} = \left(\frac{dM}{dy} \right) - \left(\frac{dN}{dx} \right)$$

obtinetur vtrunque per $y dx - x dy$ multiplicando:

$$\frac{Ny dL - mL N dy - m L M dx + M x dL}{L} = n(M dx + N dy) - x dM - y dN$$

vnde elicitur:

$$\frac{dL}{L} = \frac{(m+n)(M dx + N dy) - x dM - y dN}{M x + N y}$$

quae formula manifeste fit integrabilis posito $m+n=-1$, quo facto erit $dL = -L(M dx + N dy)$. Quam ob rem

multiplicator quaesitus habebitur $L = \frac{1}{M x + N y}$.

Coroll. 1.

45. Proposita igitur aequatione differentiali homogenea $M dx + N dy = 0$, ea facillime ad integrabilitatem reducitur, propterea quod formula $\frac{M dx + N dy}{M x + N y}$ est integrabilis, cuius integrale, per methodum supra traditam inuentum, dabit aequationem integram quaesitam.

Coroll. 2.

46. Eo casu tantum incommodum oritur, ubi fit $M x + N y = 0$, veluti evenit in aequatione $y dx - x dy = 0$, quae dividi deberet per $xy - xy = 0xy$. Sed quia huius divisoris multiplex quodcumque aequae satisfacit, divisor $x y$ negotium conficiet, quemadmodum per se est perspicuum.

Scholion.

Scholion.

47. Notissima est methodus, qua sagacissimus *Ioh. Bernoullius* olim omnes aequationes differentiales homogeneas ad separabilitatem variabilium perducere docuit. Proposita scilicet huiusmodi aequatione $M dx + N dy = 0$, in qua M et N sint functiones homogeneae n dimensionum, ponere iubet $y = ux$, quo facto functiones M et N huiusmodi formas induent, ut sit $M = x^n U$, et $N = x^n V$, existentibus U et V functionibus ipsius u tantum. Aequatio ergo proposita per x^n diuisa abibit in hanc: $U dx + V dy = 0$. Cum autem sit $dy = u dx + x du$, habebimus $U dx + V u dx + V x du = 0$, quae per $x(U + Vu)$ diuisa fit separabilis, seu haec forma

$$\frac{(U + Vu) dx + V x du}{x(U + Vu)} \text{ integrabilis.}$$

$$\text{At est } (U + Vu) dx + V x du = \frac{1}{x^n} (M dx + N dy)$$

et $x^n(U + Vu) = M + Nu$. Integrabilis ergo erit haec formula:

$$\frac{M dx + N dy}{x(M + Nu)} = \frac{M dx + N dy}{Mx + Ny} \text{ ob } ux = y.$$

Expositis igitur his duobus aequationum generibus, quae per idoneos multiplicatores integrabiles reddi possunt, videamus, ad quanam alia genera eadem methodus extendi possit: ac primo quidem obseruo, omnes aequationes differentiales, quae aliis methodis integrari possunt, etiam hac methodo per idoneum multiplicatorem tractari posse, id quod in sequente problemate clarius explicabitur.

Problema 7.

48. Proposita aequatione differentiali $Mdx + Ndy = 0$, si inuenta fuerit eius integralis aequatio completa, assignare omnes multiplicationes, qui aequatorem differentialem reddant integrabilem.

Solutio.

Cum aequatio integralis completa inuoluat quantitatem constantem arbitrariam C , quae in aequatione differentiali non inest, utcumque ea sit implicata, quaeratur eius valor per resolutionem aequationis, qui sit $C = V$, eritque V functio ipsarum x et y , quae insuper constantes aequationis differentialis in se complectetur. Tum ista aequatio $C = V$ differentietur, sicque prodibit $0 = dV$. Ac iam necesse est, ut dV diuisorem habeat ipsam formulam differentialem propositam. Sit itaque $dV = L(Mdx + Ndy)$, eritque L multiplicator idoneus, qui aequationem differentialem propositam reddit integrabilem. Deinde cum, denotante Z functionem quamcunque ipsius V , sit etiam formula $ZdV = LZ(Mdx + Ndy)$ integrabilis, expressio LZ omnes multiplicatores includet, quibus aequatio differentialis proposita $Mdx + Ndy = 0$ fit integrabilis.

Coroll. 1.

49. Quoties ergo aequationis differentialis $Mdx + Ndy = 0$ integrale completum assignari potest, toties non solum unus, sed plane omnes multiplicatores definire licet, quibus ea aequatio integrabilis reddatur.

Coroll.

Coroll. 2.

50. Cum ergo aliis methodis plurium aequationum differentialium integralia completa sint inuenta, hinc methodus haecenus tradita, quae ad duo tantum aequationum genera adhuc est applicata, non mediocriter amplificari poterit.

Scholion.

51. Interim tamen, nisi ad specialissima exempla descendere velimus, aequationes differentiales, quarum integralia completa assignare licet, ad exiguum numerum reducuntur. Ac primo quidem occurrunt aequationes differentiales primi gradus in hac forma contentae

$$dx(\alpha + \beta x + \gamma y) + dy(\delta + \epsilon x + \zeta y) = 0$$

quae quia facile ad homogeneas reuocantur, etiam hac methodo per multiplicatores tractari poterant. Deinde memoratu digna est haec forma $dy + Pydx + Qydx = Rdx$, cuius si constet vnus valor singularis satisfaciens, ex eo integrale completum elici potest, ex quo his casibus multiplicatores idoneos assignare licebit. Tertio etiam perpendi merentur casus huius aequationis $dy + yydx = ax^m dx$, ab inuettore Riccatiana dictae, quibus ea ad separabilitatem reduci potest. Denique existunt casus huius aequationis $ydy + Pydx = Qdx$, qui cum sint integrabiles, ad multiplicatorum inuestigationem sunt accommodati. Hinc noua patefiet via ex data multiplicatorum firma eas aequationes inueniendi, quae per eos sunt integrabiles, vnde fortasse haud spernenda analyticos incrementa haurire licebit.

Problema 8:

52. Proposita aequatione differentiali primi gradus :

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)dx + (\delta + \epsilon x + \zeta y)dy = 0$$

inuenire multiplicatores, qui eam reddant integrabilem.

Solutio.

Reducatur haec aequatio ad homogeneitatem ponendo :

$$x = t + f \text{ et } y = u + g, \text{ vt prodeat}$$

$$(\alpha + \beta f + \gamma g + \beta t + \gamma u)dt + (\delta + \epsilon f + \zeta g + \epsilon t + \zeta u)du = 0$$

quae posito $\alpha + \beta f + \gamma g = 0$ et $\delta + \epsilon f + \zeta g = 0$, unde quantitates f et g determinantur, vtique fit homogenea, scilicet

$$(\beta t + \gamma u)dt + (\epsilon t + \zeta u)du = 0;$$

ideoque per multiplicatorem $\frac{1}{\beta t + (\gamma + \epsilon)t u + \zeta u^2}$ integrabilis redditur. Hinc inuentis litteris f et g aequatio proposita integrabilis euadet, si diuidatur per

$$\beta(x-f)^2 + (\gamma + \epsilon)(x-f)(y-g) + \zeta(y-g)^2,$$

seu per

$$\beta x x + (\gamma + \epsilon)xy + \zeta y y - (2\beta f + \gamma g + \epsilon g)x - (2\zeta g + \gamma f + \epsilon f)y + \beta f f + (\gamma + \epsilon)fg + \zeta g g$$

$$\text{Cum autem sit } f = \frac{\alpha \zeta - \gamma \delta}{\gamma \epsilon - \beta \zeta}, \text{ et } g = \frac{\beta \delta - \alpha \epsilon}{\gamma \epsilon - \beta \zeta},$$

prodibit diuisor quaesitus:

$$\begin{aligned} & \beta x x + (\gamma + \epsilon)xy + \zeta y y + \frac{\alpha \gamma \delta - \alpha \alpha \zeta + \alpha \delta \epsilon - \beta \delta \delta}{\gamma \epsilon - \beta \zeta} \\ & \frac{-2\alpha \beta \zeta + \beta \gamma \delta - \beta \delta \epsilon + \alpha \gamma \epsilon + \alpha \epsilon \epsilon}{\gamma \epsilon - \beta \zeta} x \\ & \frac{-2\beta \delta \zeta + \alpha \epsilon \zeta - \alpha \gamma \zeta + \gamma \delta \epsilon + \gamma \gamma \delta}{\gamma \epsilon - \beta \zeta} y. \end{aligned}$$

In-

AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM. 32

Inuento autem vno diuifore, feu multiplicatore, ex eo reperientur facile omnes poffibiles.

Coroll. 1.

53. Forma ergo diuiforis, per quem aequatio differentialis.

$(\alpha + \beta x + \gamma y)dx + (\delta + \epsilon x + \zeta y)dy = 0$
redditur integrabilis, est.

$\beta xx + (\gamma + \epsilon)xy + \zeta yy + Ax + By + C$
vbi constantes A, B, C fupra sunt definitae.

Coroll. 2.

54. Cum diuifor inuentus etiam fatisfaciat, fi per $\gamma\epsilon - \beta\zeta$ multiplicetur, patet, cafu, quo $\beta\zeta = \gamma\epsilon$, diuiforem fore.

$(\alpha\epsilon\epsilon - \beta\delta\epsilon + \beta\gamma\delta - \alpha\beta\zeta)x + (\gamma\gamma\delta - \alpha\gamma\zeta + \alpha\epsilon\zeta - \beta\delta\zeta)y + \alpha\gamma\delta - \alpha\alpha\zeta + \alpha\delta\epsilon - \beta\delta\delta$
qui pofito $\beta = mf$; $\gamma = nf$; $\epsilon = mg$; $\zeta = ng$, abit in
 $m(\alpha g - \delta f)(mg - nf)x + n(\alpha g - \delta f)(mg - nf)y$
 $+ (\alpha g - \delta f)(\delta m - \alpha n)$

Coroll. 3.

55. Quare fi aequatio propofita fuerit huiusmodi:

$(\alpha + f(mx + ny))dx + (\delta + g(mx + ny))dy = 0$
ea reddetur integrabilis, fi diuidatur per

$(mg - nf)(mx + ny) + \delta m - \alpha n$

fiue per $mx + ny + \frac{\delta m - \alpha n}{mg - nf}$. At fi fuerit $mg - nf = 0$, aequatio propofita iam ipfa eft integrabilis.

Prob-

Problema 9.

56. Proposita hac aequatione differentiali:

$$dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$$

vbi P , Q et R sint functiones ipsius x tantum, si constet, huic aequationi satisfacere $y = v$, existente v functione ipsius x , inuenire multiplicatores, qui istam aequationem reddant integrabilem.

Solutio.

Cum aequationi satisfaciatur valor $y = v$, erit

$$dv + Pvdx + Qvvd x + Rdx = 0;$$

si ergo ponatur $y = v + \frac{1}{z}$, habebitur

$$-\frac{dz}{zz} + \frac{Pdx}{z} + \frac{2Qvdx}{z} + \frac{Qdx}{zz} = 0$$

sive:

$$dz - (P + 2Qv)zdx - Qdx = 0$$

quae integrabilis redditur per multiplicatorem

$$e^{-\int (P + 2Qv)dx}.$$

Hic ergo multiplicator per zz multiplicatus conueniet aequationi propositae. Cum ergo sit $z = \frac{1}{y-v}$, multiplicator aequationem propositam integrabilem reddens erit:

$$\frac{x}{(y-v)^2} e^{-\int (P + 2Qv)dx}$$

Sit breuitatis gratia $e^{-\int (P + 2Qv)dx} = S$. Quia aequationis $dz - (P + 2Qv)zdx - Qdx = 0$ integrale est

$$Sz - \int Q S dx = \text{Const.}$$

omnes multiplicatores quaesiti continebuntur in hac forma:

$$\frac{S}{(y-v)^2} \text{ funct. } \left(\frac{S}{y-v} - \int Q S dx \right)$$

vbi

(A)

ubi per hypothefin v est functio cognita ipsius x , ideo-
que etiam $S = e^{-\int (P + 2Qv) dx}$

Coroll. 1.

57. Multiplicator ergo, qui primum se obtulit, est $\frac{S}{(y-v)^2}$, tum vero etiam multiplicator erit $\frac{S}{S(y-v) - (y-v)^2 Q S dx}$ qui etfi continet formulam integralem $\int Q S dx$, faepe numero illo simplicior euadere potest.

Coroll. 2.

58. Si enim S est quantitas exponentialis, fieri potest, ut $\int Q S dx$ huiusmodi formam $S T$ induat, existente T functione algebraica, quo casu multiplicator erit

$$\frac{1}{y-v - (y-v)^2 T} = \frac{1}{(y-v)(1 - Ty + Tv)}$$

ideoque algebraicus, quod in priori forma fieri nequit.

Coroll. 3.

59. Cum his duobus casibus multiplicator sit fractio, in cuius solum denominatorem variabilis y ingreditur, ibique ultra quadratum non ascendat, innumerales alii huiusmodi multiplicatores exhiberi possunt: Sit enim $\int Q S dx = V$, et fractionis $\frac{S}{(y-v)^2}$ denominatorem multiplicare licebit per $A + B(\frac{S}{y-v} - V) + C(\frac{S}{y-v} - V)^2$, ficque erit generalior multiplicatoris forma:

$$\frac{S}{A(y-v)^2 + BS(y-v) - BV(y-v)^2 + CSS - 2CSV(y-v) + CVV(y-v)^2}$$

fiue :

$$\frac{S}{(A - BV + CVV)y^2 - (2AV - BS - 2BVv + 2CSV + 2CVVv)y + Avv - BSv - BVvv + CSS + 2CSVv + CV^2v^2}$$

Nou. Comm. Tom. VIII.

E

Coroll. 4.

Coroll. 4.

60. Quodsi ergo haec formula $\frac{dy + Pydx + Qyydx + Rdx}{Lyy + My + N}$ fuerit integrabilis, denominator ita debet esse comparatus, vt fit

$$SL = A - BV + CVV, SM = S(B - 2CV) - 2v(A - BV + CVV)$$

et $SN = CSS - Sv(B - 2CV) + vv(A - BV + CVV)$ existente $dv + Pvdx + Qvvdx + Rdx = 0$, $S = e^{-\int(P+2Qv)dx}$ et $V = \int QSdx$.

Problema 10.

61. Proposita aequatione differentiali praecedente:

$$dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$$

inuenire functiones L, M et N ipsius x, vt ea per formulam $Lyy + My + N$ diuisa fiat integrabilis.

Solutio.

Cum igitur integrabilis esse debeat haec formula:

$$\frac{dy + dx(Py + Qyy + R)}{Lyy + My + N}$$

per proprietatem generalem esse oportet, postquam per $(Lyy + My + N)^2$ multiplicauerimus:

$$\frac{yy \frac{dL}{dx} - y \frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dx}}{Lyy + My + N} = \frac{+QMyy - 2RLy + NP}{-PLyy + 2QNy - RM}$$

Vnde pro determinatione functionum L, M et N has consequimur aequationes:

$$I. dL = PLdx - QMdx$$

$$II. dM = 2RLdx - 2QNdx$$

$$III. dN = RMdx - PNdxdx,$$

ex

ex quarum prima deducimus:

$$M = \frac{PL}{Q} - \frac{dL}{Qdx}$$

et ex secunda: $N = \frac{RL}{Q} - \frac{dM}{2Qdx}$,

qui valores pro M et N in tertia substituti, dant:

$$dN = \frac{PdM}{2Q} - \frac{RdL}{Q},$$

Cum autem fit, sumto differentiali dx constante,

$$dM = \frac{PdL + LdP}{Q} - \frac{PLdQ}{Q^2} - \frac{dL}{Qdx} + \frac{dQdL}{Q^2dx}, \text{ erit}$$

$$N = \frac{RL}{Q} - \frac{PdL}{2Qdx} - \frac{LdP}{2Qdx} + \frac{PLdQ}{2Q^2dx} + \frac{dL}{2Qdx^2} - \frac{dQdL}{2Q^2dx^2}$$

$$\text{et } dN = \frac{PPdL}{2Q^2} + \frac{PLdP}{2Q^2} - \frac{PPLdQ}{2Q^3} - \frac{PdL}{2Qdx} + \frac{PdQdL}{2Q^3dx} - \frac{RdL}{Q}$$

quod ergo illius differentiali debet aequari, vnde fit:

$$\begin{aligned} 0 = & QQd^3L - 3QdQddL - PPQQdLdx^2 - 2QQdPdLdx \\ & + 3dQ^2dL + 2PQdQdLdx - QdLddQ + 4Q^3RdLdx^2 \\ & - PPQQdPdLdx^2 + PPQLdQdx^2 - QQLdLdxddP \\ & + PQLdLdxddQ \\ & + 3QLdPdQdx - 3PLdQ^2dx + 2Q^3LdRdx^2 \\ & - 2Q^2RLdQdx^2 \end{aligned}$$

Haec autem aequatio si per $\frac{L}{Q^2}$ multiplicetur, integrari poterit, eritque eius integralis

$$\begin{aligned} \text{Const.} = & \frac{LdL}{Q} - \frac{LdLdQ}{Q^2} - \frac{dL^2}{2Q} - \frac{PPLLdx^2}{2Q} - \frac{LLdPdL}{Q} \\ & + \frac{PLLdQdx}{Q^2} + \frac{2RLldLdx^2}{Q} \end{aligned}$$

quae in hanc formam abit:

$$\begin{aligned} 2EQ^3dx^2 = & 2QLddL - 2LdLdQ - QdL^2 - PPQLldLdx^2 \\ & - 2QLldPdLdx + 2PLLdQdx + 4QQRLLdx^2. \end{aligned}$$

Quodsi ponatur $L = zz$, aequatio induet hanc formam:

$$\begin{aligned} \frac{2EQ^3dx^2}{z^3} = & 4Qddz - 4dQdz - z(PPQdx^2 + 2QdPdL \\ & - 2PdQdx - 4QQRdx^2). \end{aligned}$$

E 2

Coroll. I.

Coroll. 1.

62. Quoties ergo per problema praecedens, valor ipsius L assignari potest, toties aequatio differentialis tertii ordinis hic inventa, et ea secundi ordinis, ad quam illam reduxi, generaliter resolui poterit: quae resolutio, cum alias foret difficillima, probe est notanda.

Coroll. 2.

63. Scilicet si v fuerit eiusmodi functio ipsius x , quae loco y posita, satisfaciat aequationi $dy + Pydx + Qyydx + Rdx = 0$, capiatur $S = e^{-\int (P + 2Qv)dx}$, statuaturque $V = \int Q S dx$, quo facto erit pro nostra aequatione differentiali tertii ordinis $L = \frac{A - BV + CVV}{S}$, qui valor cum tres constantes arbitrarias complectatur, adeo erit eius aequationis differentiale completum.

Coroll. 3.

63. Si sit $P = 0$, $Q = 1$ et R functio quaecunque ipsius x , aequatio differentialis tertii gradus hanc accipiet formam:

$0 = d^3 L + 4R dL dx^2 + 2L dR dx^2$
pro cuius ergo differentiali completo inveniundo, quaeratur primo functio ipsius x , quae sit $= v$, quae satisfaciat huic aequationi $dv + vv dx + R dx = 0$: tum ponatur $V = \int e^{-2\int v dx} dx$, eritque $L = (A - BV + CVV) e^{+\int 2v dx}$.

Coroll. 4.

Coroll. 4.

64. Idem ergo integrale satisfaciet huic aequationi differentiali secundi gradus :

$$E dx^2 = 2 L ddL - dL^2 + 4 R L L dx^2$$

et, posito $L = z z$, etiam huic :

$$\frac{E dx^2}{z^2} = d dz + R z dx^2$$

pro qua itaque est $z = e^{\int v dx} \sqrt{(A - BV + CVV)}$.

Scholion.

65. Omnino animaduerti meretur haec integratio, quippe quae ex aliis principiis vix quidem praestari potest. Hinc autem adipiscimur integrationem completam sequentis aequationis differentio-differentialis factis late patentis :

$$d dz + S dx dz + T z dx^2 = \frac{E dx^2}{z^2} e^{-2 \int S dx}$$

Primo nempe quaeratur valor ipsius v ex hac aequatione differentiali primi gradus :

$$d v + v v dx + S v dx + T dx = 0$$

quo inuento ponatur breuitatis ergo $V = \int e^{-\int v dx} \int S dx dx$ eritque

$$z = e^{\int v dx} \sqrt{(A + BV + CVV)},$$

si modo constantes arbitrariae A, B, C ita accipiantur, ut sit $AC - \frac{1}{2} BB = E$, sicque adhuc duae constantes arbitrio nostro relinquuntur, vti natura integrationis completae postulat.

Exemplum I.

66. Proposita sit haec aequatio differentialis

$$dy + y dx + yy dx - \frac{dx}{x} = 0,$$

cuius multiplicatores, qui eam reddant integrabilem, investigari oporteat.

Erit ergo, Problema 9. huc transferendo, $P = 1$, $Q = 1$ et $R = -\frac{1}{x}$, et quia aequationi satisfacit valor $y = \frac{1}{x}$, erit $v = \frac{1}{x}$. Quare fiet $S = e^{-\int (1 + \frac{2}{x}) dx} = e^{-x}$ et multiplicator, qui primum se offert, habebitur $= e^{-x} \frac{1}{(xy-1)^2}$. Hunc autem porro multiplicare licet per functionem quamcunque huius formae $e^{-x} \frac{1}{x(xy-1)^2} = \int e^{-x} \frac{dx}{x}$; cum vero haec forma integrari nequeat, alii multiplicatores idonei assignari nequeunt. Ob primum ergo integrabilis est haec forma:

$$e^{-x} \frac{1}{(xy-1)^2} (dy + y dx + yy dx - \frac{dx}{x})$$

cuius, si x capitur constans, integrale est.

$$\frac{-e^{-x}}{x(xy-1)} + X$$

quae differentiat, posito y constante, praebet

$$\frac{e^{-x} dx (xxy + 2xy - x - 1)}{xx(xy-1)^2} + dX$$

quod aequari debet alteri membro $\frac{e^{-x}}{(xy-1)^2} (y dx + yy dx - \frac{dx}{x})$

$$\text{vnde fit } dX = \frac{e^{-x} dx}{xx(xy-1)^2} (xxyy - 2xy + 1) = e^{-x} \frac{dx}{xx};$$

sicque

sicque integrale completum nostrae aequationis est

$$\frac{-e^{-x}}{x(xy-1)} + \int e^{-x} \frac{dx}{xx} = \text{Const.}$$

Exemplum 2.

67, Inuenire multiplicatores idoneos, qui red-
dant hanc aequationem integrabilem :

$$dy + y dx - \frac{a dx}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} = 0.$$

Casus singularis huic aequationi satisfaciens est

$$y = \frac{k + \gamma x}{\alpha + \beta x + \gamma xx} = v$$

existente $k = \frac{1}{2}\beta \pm \sqrt{\frac{1}{4}\beta\beta - \alpha\gamma + a}$.

Cum nunc sit $P=0$, et $Q=1$, erit

$$S = e^{-\int \frac{k dx + \gamma x dx}{\alpha + \beta x + \gamma xx}}$$

vel posito breuitatis gratia $\pm \sqrt{\frac{1}{4}\beta\beta - \alpha\gamma + a} = \frac{1}{2}n$
erit

$$S = \frac{1}{\alpha + \beta x + \gamma xx} e^{-\int \frac{n dx}{\alpha + \beta x + \gamma xx}}$$

et $\int S dx = -\frac{1}{n} e^{-\int \frac{n dx}{\alpha + \beta x + \gamma xx}}$

Multiplicator ergo primum inuentus est

$$e^{-\int \frac{n dx}{\alpha + \beta x + \gamma xx}} \cdot \frac{\alpha + \beta x + \gamma xx}{((\alpha + \beta x + \gamma xx)y - k - \gamma x)^2}$$

qui porro duci potest in functionem quamcunque huius
quantitatis

$$e^{-\int \frac{n dx}{\alpha + \beta x + \gamma xx}} \left(\frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)y - k - \gamma x} + \frac{1}{n} \right).$$

Ducatur ergo in

$$e^{\int \frac{n dx}{\alpha + \beta x + \gamma xx}} \cdot \frac{(\alpha + \beta x + \gamma xx)y - k - \gamma x}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)y + n - k - \gamma x}$$

ac prodibit multiplicator algebraicus :

$$\frac{\alpha + \beta x + \gamma x x}{((\alpha + \beta x + \gamma x x)y - k - \gamma x)((\alpha + \beta x + \gamma x x)y + n - k - \gamma x)}$$

qui reducitur ad hanc formam :

$$\frac{1}{(\alpha + \beta x + \gamma x x) \left(y - \frac{2\gamma x - \beta + \sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\gamma + 4a)}}{2(\alpha + \beta x + \gamma x x)} \right) \left(y - \frac{2\gamma x - \beta + \sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\gamma + 4a)}}{2(\alpha + \beta x + \gamma x x)} \right)}$$

Aequationis autem integrale completum est

$$e^{-\int \frac{n dx}{\alpha + \beta x + \gamma x x} \cdot \frac{(\alpha + \beta x + \gamma x x)y + n - k - \gamma x}{(\alpha + \beta x + \gamma x x)y - k - \gamma x}} = \text{Const.}$$

existente $n = \sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\gamma + 4a)}$ et $k = \frac{\beta + n}{2}$.

Ex quo aequatio integralis completa erit

$$e^{-\int \frac{n dx}{\alpha + \beta x + \gamma x x} \cdot \frac{2(\alpha + \beta x + \gamma x x) + n - \beta - 2\gamma x}{2(\alpha + \beta x + \gamma x x)y - n - \beta - 2\gamma x}} = \text{Const.}$$

cuius indoles est manifesta, dummodo $n = \sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\gamma + 4a)}$ sit numerus realis.

Quodsi autem valor ipsius n sit imaginarius, puta $n = m\sqrt{-1}$, ob $e^{p\sqrt{-1}} = \cos.p + \sqrt{-1} \sin.p$, aequatio integralis ita ad realitatem perducitur potest. Sit

$-m \int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma x x} = p$, et $2(\alpha + \beta x + \gamma x x)y - \beta - 2\gamma x = q$, eritque ea :

$$(\cos.p + \sqrt{-1} \sin.p) \cdot \frac{q + m\sqrt{-1}}{q - m\sqrt{-1}} = \text{Const.} = A + B\sqrt{-1}$$

hinc fit :

$$q \cos.p - m \sin.p + (m \cos.p + q \sin.p) \sqrt{-1} = Aq + Bm + (Bq - Am) \sqrt{-1}$$

aequentur seorsim membra realia et imaginaria :

$$q \cos.p - m \sin.p = Aq + Bm; \quad m \cos.p + q \sin.p = Bq - Am$$

quae duae aequationes congruunt, si capiatur $AA + BB = 1$.

Sit

Sit itaque constans arbitraria $A = \cos.\theta$, vt sit $B = \sin.\theta$ et casu, quo $V(\beta\beta - 4\alpha\gamma + 4a) = mV - 1$, aequatio realis erit

$$q\cos.p - m\sin.p = q\cos.\theta + m\sin.\theta \text{ seu } q = \frac{m(\sin.p + \sin.\theta)}{\cos.p - \cos.\theta} = m \cot.\frac{\theta - p}{2}$$

Quare aequationis differentialis

$$dy + yydx + \frac{(mm + \beta\beta - 4\alpha\gamma)dx}{4(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} = 0$$

posito $p = \int \frac{-m dx}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$, aequatio integralis completa est

$$2(\alpha + \beta x + \gamma xx)y = \beta + 2\gamma y + m \cot.\frac{\theta - p}{2}$$

$$\text{seu } y = \frac{\frac{1}{2}\beta + \gamma x + \frac{1}{2}m \cot.\frac{\theta - p}{2}}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$$

$$\text{Vel sit } \theta = 180^\circ - \zeta, \text{ et habebitur } y = \frac{\frac{1}{2}\beta + \gamma x + \frac{1}{2}m \tan.\frac{\zeta + p}{2}}{\alpha + \beta x + \gamma xx}$$

Hoc autem casu notandum est, integrale speciale, ex quo haec omnia deduximus, fieri imaginarium, quo tamen non obstante inde integrale completum in forma reali exhibere licuit.

Exemplum 3.

68. *Proposita aequatione Riccatiana* $dy + yydx - ax^m dx = 0$, *pro casibus exponentis* m , *quibus eam separare licet, inuenire multiplicatores idoneos.*

Sit $y = v$ valor aequationi satisfaciens, et cum sit $P = 0$, $Q = 1$, et $R = -ax^m$, erit primus multiplicator, aequationem integrabilem reddens,

$$e^{-2\int v dx} \frac{1}{(y - v)^2}$$

Tom. VIII. Nou. Comm.

F

per

per quem si aequatio multiplicetur, cum integrale completum fit

$$e^{-2\int v dx} \frac{1}{y-v} - \int e^{-2\int v dx} dx = \text{Const.}$$

Quare si Z denotet functionem quamcunque huius quantitatis, omnes multiplicatores continebuntur in hac forma:

$$e^{-2\int v dx} \frac{Z}{(y-v)^2}$$

Hinc si ponatur $\int e^{-2\int v dx} dx = V$, omnes multiplicatores in hac forma $\frac{1}{Ly + My + N}$ contenti obtinebuntur, si capiatur:

$$L = e^{2\int v dx} (A - BV + CVV)$$

$$M = B - 2CV - 2ve^{2\int v dx} (A - BV + CVV)$$

$$N = Ce^{-2\int v dx} - v(B - 2CV) + vve^{2\int v dx} (A - BV + CVV)$$

Verum hic valor ipsius L simul est integrale completum huius aequationis differentialis tertii gradus:

$$0 = d^3 L - 4ax^m dL dx^2 - 2maLx^{m-1} dx^2$$

hincque etiam huius secundi gradus:

$$Edx^2 = 2LdL - dL^2 - 4aLLx^m dx^2$$

existente $E = 4AC - BB$.

Scholion.

69. Re attentius perpenſa aequationem differentialem tertii ordinis etiam methodo directa reſolui, eiusque integrale completum idem, quod hic eſt aſſignatum, elici poſſe deprehendi. Sit enim propoſita haec aequatio:

$$d^3 L + 4R dL dx^2 + 2L dR dx^2 = 0$$

vbi

vbi R fit functio quaecunque ipsius x , sumto differentiali dx constante. Iam quaero functionem ipsius x , per quam ista aequatio multiplicata euadat integrabilis. Sit S ista functio, et aequationis

$$S d^3 L + 4SR dL dx^2 + 2SL dR dx^2 = 0$$

integrale erit

$$S ddL - dS dL + L(ddS + 4SR dx^2) = 2C dx^2$$

dummodo fit

$$d^3 S + 2S dR dx^2 + 4R dS dx^2 = 0.$$

Sufficit scilicet quemuis valorem particulariter satisfaciendum fuisse. At haec aequatio, per S multiplicata, neglecta constante, dat integrale :

$$S ddS - \frac{1}{2} dS^2 + 2SSR dx^2 = 0.$$

Ponatur $S = e^{\int v dx}$, eritque

$$2dv + 2v v dx + 2R dx = 0$$

vnde negotium huc redit, vt pro v saltem valor particularis inuestigetur, qui satisfaciat huic aequationi differentiali primi gradus: $dv + v v dx + R dx = 0$, quem igitur tanquam concessum assumo. Hinc nostra aequatio semel integrata erit, ob $S = e^{\int v dx}$,

$$ddL - 2v dx dL + L(2dv dx + 4v v dx^2 + 4R dx^2) = 2C e^{-\int v dx} dx^2$$

Cum igitur, ob $R dx = -dv - v v dx$, habeamus

$$ddL - 2v dx dL - 2L dx dv = 2C e^{-\int v dx} dx^2$$

cuius integrale manifesto est :

$$dL - 2L v dx = B dx + 2C dx / e^{-\int v dx} dx$$

et per $e^{-\int v dx}$, denuo multiplicando integrale, prodibit

$$e^{-\int v dx} L = A + B \int e^{-\int v dx} dx + 2C \int e^{-\int v dx} dx \int e^{-\int v dx} dx$$

Quare si breuitatis gratia ponatur $\int e^{-2\int v dx} dx = V$, habebimus

$$L = e^{2\int v dx} (A + BV + CVV)$$

prorsus vti ante inuenimus.

Problema 2.

70. Proposita aequatione Riccatiana $dy + yy dx = ax^m dx$, inuenire eius integralia particularia, casibus, quibus ea separabilis existit.

Solutio.

Ponendo $a = cc$, et $m = -4n$, tribuatur aequationi ista forma:

$$dy + yy dx - ccx^{-4n} dx = 0.$$

Cum enim quaestio circa integralia particularia versetur, nihil interest, vtrum ea sint realia, nec ne. Quo autem facilius, et vna quasi operatione, hos casus, quibus y per functionem ipsius x exprimere licet, eliciamus: statuamus $y = cx^{-2n} + \frac{dz}{z dx}$, et sumto dx constante, nanciscemur hanc aequationem differentialem secundi gradus:

$$-2ncx^{-2n-1} dx + \frac{ddz}{z dx} + \frac{2cx^{-2n} dz}{z} = 0, \text{ seu}$$

$$\frac{ddz}{dz^2} + \frac{2cdz}{x^{2n} dz} - \frac{2ncz}{x^{2n+1}} = 0$$

cuius valor fingatur:

$$z = Ax^n + Bx^{2n-1} + Cx^{3n-2} + Dx^{4n-3} + Ex^{5n-4} + \text{etc.}$$

quo

quo debite substituto obtinebimus:

$$0 = n(n-1)Ax^{n-2} + (3n-1)(3n-2)Bx^{3n-3} + (5n-2)(5n-3)Cx^{5n-4} + \text{etc.} \\ + 2ncAx^{n-1} + 2(3n-1)cB + 2(5n-2)cC + 2(7n-3)cD \\ - 2ncA - 2ncB - 2ncC - 2ncD$$

unde coefficientes ficti ita determinantur:

$$2(2n-1)cB + n(n-1)A = 0; B = \frac{n(n-1)A}{2(2n-1)c} \\ 2(4n-2)cC + (3n-1)(3n-2)B = 0; C = \frac{-(3n-1)(3n-2)B}{4(2n-1)c} \\ 2(6n-3)cD + (5n-2)(5n-3)C = 0; D = \frac{-(5n-2)(5n-3)C}{6(2n-1)c}$$

Statim igitur atque vnus coefficientis euanesceat, sequentes simul omnes euanescent, id quod euenit his casibus:

$$n = 0; n = \frac{1}{2}; n = \frac{3}{2}; n = \frac{5}{2}; \text{etc.}$$

$$n = 1; n = \frac{3}{2}; n = \frac{5}{2}; n = \frac{7}{2}; \text{etc.}$$

Denotante igitur i numerum integrum quemcunque, quoties fuerit $n = \frac{i}{i \pm 1}$, toties resolutio aequationis exhiberi potest. Erit enim $y = cx^{-2n} + \frac{dz}{z dx}$, existente

$$z = Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2} + Dx^{7n-3} + Ex^{9n-4} + \text{etc.}$$

Proueniet ergo hic valor particularis ipsius y :

$$y = cx^{-2n} + \frac{nAx^{n-1} + (3n-1)Bx^{3n-2} + (5n-2)Cx^{5n-3}}{Ax^n + Bx^{3n-1} + Cx^{5n-2}} + \text{etc.}$$

Coroll. I.

71. Quodsi ergo iste valor particularis ipsius y vocetur $=v$, erit aequationis propositae multiplicator idoneus $= e^{-\int v dx}$. Ac si ponatur $\int e^{-\int v dx} dx$

F 3

=V,

$=V$, sumtis $A=0$, et $C=0$, erit alius factor simplicior

$$\frac{1}{e^{2\int v dx} V y y - (1 + 2v e^{2\int v dx} V) y + v + v e^{2\int v dx} V}.$$

Coroll. 2.

72. At est $\int v dx = \frac{-c}{(2n-1)x^{2n-1}} + l(Ax^n + Bx^{2n-1} + Cx^{5n-2} + \text{etc.})$

unde fit $e^{-2\int v dx} = \frac{2c}{e^{(2n-1)x^{2n-1}}} \frac{1}{(Ax^n + Bx^{2n-1} + Cx^{5n-2} + \text{etc.})^2}$

ex quo porro inueniri potest valor ipsius $V = \int e^{-2\int v dx} dx$ qui si fuerit huiusmodi $e^{-2\int v dx} T$, existente T functione algebraica, erit superior multiplicator algebraicus.

Coroll. 3.

73. Inuenito valore v , seu integrali particulari aequationis propositae, inde statim habebitur integrale completum eiusdem, quippe quod erit:

$$\frac{e^{-2\int v dx}}{y - v} - \int e^{-2\int v dx} dx = \text{Const.}$$

Casus 1. quo $n=0$.

74. Pro hac ergo aequatione $dy + yy dx = cc dx$, ob $B=0$, $C=0$ etc. erit valor particularis $y=c$; Quare

Quare posito $v=c$, erit $e^{-2\int v dx} = e^{-2cx}$ et $V = \int e^{-2\int v dx}$
 $dx = -\frac{1}{2c} e^{-2cx}$; unde integrale completum est

$$\frac{e^{-2cx}}{y-c} + \frac{1}{2c} e^{-2cx} = \text{Const.}$$

seu $\frac{e^{-2cx}(y+c)}{y-c} = \text{Const.}$

Porro, ob $e^{2\int v dx} V = -\frac{1}{2c}$, et $v=c$, erit multiplicator algebraicus :

$$\frac{1}{-\frac{1}{2c} yy + \frac{1}{2} e^{-2cx}}$$

qui reducitur ad $\frac{1}{yy - c e^{-2cx}}$, vti per se est perspicuum.

Casus 2. quo $n=1$.

75. Pro hac ergo aequatione $dy + y y dx = \frac{c c dx}{x^2}$
 ob $B=0$, $C=0$ etc. erit valor particularis $y = \frac{c}{x} + \frac{1}{x}$.

Quare posito $v = \frac{c}{xx} + \frac{1}{x}$, erit $e^{-2\int v dx} = \frac{e^{\frac{2c}{x}}}{xx}$ et $V = -\frac{1}{2c}$

$e^{\frac{2c}{x}}$. Hinc integrale completum est

$$\frac{e^{\frac{2c}{x}}}{xx y - x - c} + \frac{1}{2c} e^{\frac{2c}{x}} = \text{Const.}$$

seu $e^{\frac{2c}{x}}, \frac{xx y - x + c}{xx y - x - c} = \text{Const.}$

Porro, ob $e^{2\int v dx} V = -\frac{xx}{2c}$, et $v = \frac{x+c}{xx}$, habebitur multiplicator algebraicus :

$$\frac{1}{xx y y - 2xy - 1 - \frac{cc}{xx}} = \frac{1}{(xy-1)^2 - \frac{cc}{xx}}$$

siue

sive aequatio proposita $dy + yydx - \frac{ccdx}{x^2} = 0$ fit integrabilis, si diuidatur per $(xy-1)^2 - \frac{cc}{xx}$

Casus 3. quo $n = \frac{1}{3}$.

76. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{1}{3}}dx = 0$ est $B = -\frac{A}{\frac{1}{3}c}$, $C = 0$, etc. unde integrale particulare

$$y = cx^{-\frac{2}{3}} + \frac{cx^{-\frac{1}{3}}}{3cx^{\frac{1}{3}} - 1} = \frac{3ccx^{1-\frac{1}{3}}}{3cx^{\frac{1}{3}} - 1} = v$$

$$\text{et } e^{-\int v dx} = e^{-\frac{1}{3}cx^{\frac{1}{3}}} \frac{\text{Const.}}{(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3c})^2} = e^{-\frac{1}{3}cx^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)^2}$$

$$\text{hincque } V = \int e^{-\frac{1}{3}cx^{\frac{1}{3}}} \frac{dx}{(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)^2} = -e^{-\frac{1}{3}cx^{\frac{1}{3}}} \frac{3cx^{\frac{1}{3}} + 1}{18c^2(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)}$$

Quare integrale completum est

$$\frac{e^{-\frac{1}{3}cx^{\frac{1}{3}}}}{(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)^2 y - 3ccx^{-\frac{1}{3}}(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)} + \frac{e^{-\frac{1}{3}cx^{\frac{1}{3}}}(3cx^{\frac{1}{3}} + 1)}{18c^2(3cx^{\frac{1}{3}} - 1)} = \text{Const.}$$

$$\text{sive } e^{-\frac{1}{3}cx^{\frac{1}{3}}} \frac{y(1 + 3cx^{\frac{1}{3}}) + 3ccx^{-\frac{1}{3}}}{y(1 - 3cx^{\frac{1}{3}}) + 3ccx^{-\frac{1}{3}}} = \text{Const.}$$

Tum, ob $e^{\int v dx} V = \frac{1 - 9ccx^{\frac{2}{3}}}{18c^2}$, prodibit diuisor aequa-

tionem integrabilem reddens:

$$(y + 3ccx^{-\frac{1}{3}})^2 - 9ccx^{\frac{2}{3}}yy$$

Casus

Cafus 4. quo $n = \frac{2}{3}$.

77. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{1}{3}}dx = 0$
est $B = +\frac{A}{sc}$, $C = 0$ etc. unde integrale particulare:

$$y = \frac{cx^{-\frac{1}{3}} + 2cx^{-\frac{1}{3}} + 1}{3cx^{\frac{2}{3}} + x} = \frac{3ccx^{-\frac{1}{3}} + 3cx^{-\frac{1}{3}} + 1}{3cx^{\frac{2}{3}} + x} = v$$

et $e^{-\int v dx} = e^{ccx^{-\frac{1}{3}}}$. $\frac{1}{(3cx^{\frac{2}{3}} + x)^2}$ ex quo porro elicitur:

$$V = \frac{\int e^{ccx^{-\frac{1}{3}}} dx}{(3cx^{\frac{2}{3}} + x)^2} = \frac{-e^{ccx^{-\frac{1}{3}}}(3cx^{\frac{2}{3}} - x)}{18c^{\frac{2}{3}}(3cx^{\frac{2}{3}} + x)}$$

Quare integrale completum erit:

$$\frac{e^{ccx^{-\frac{1}{3}}}(x - 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 + 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}}{(x + 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 - 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}} = \text{Const.}$$

Tum ob $e^{\int v dx} V = \frac{xx - 9ccx^{\frac{4}{3}}}{18c^{\frac{2}{3}}}$ prodit diuifor algebraicus aequationem propositam integrabilem reddens:

$$((x + 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 - 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}})((x - 3cx^{\frac{2}{3}})y - 1 + 3cx^{-\frac{1}{3}} - 3ccx^{-\frac{2}{3}}).$$

Cafus 5. quo $n = \frac{2}{5}$.

78. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{2}{5}}dx = 0$
erit $B = -\frac{A}{sc}$; $C = -\frac{B}{sc} = +\frac{A}{sc^2}$; $D = 0$ etc. ideo.

Tom. VIII. Nou. Comm.

G

que

que integrale particulare:

$$y = \frac{cx^{-\frac{4}{5}} + \frac{2}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5c} x^{-\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{5}} - \frac{2}{5c}x^{\frac{1}{5}} + \frac{2}{25c^2}} = \frac{cx^{-\frac{4}{5}} + 10ccx^{-\frac{4}{5}} - 3cx^{-\frac{4}{5}}}{25ccx^{\frac{2}{5}} - 15cx^{\frac{1}{5}} + 3}$$

$$\text{seu } y = \frac{25c^2x^{\frac{2}{5}} - 5ccx^{-\frac{4}{5}}}{25ccx^{\frac{2}{5}} - 15cx^{\frac{1}{5}} + 3} = v. \text{ Vnde integrale com-}$$

pletum oritur:

$$e^{-10c x^{\frac{1}{5}}} \cdot \frac{(3 + 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{2}{5}} + 25c^2x^{-\frac{2}{5}}}{(3 - 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{2}{5}} - 25c^2x^{-\frac{2}{5}}} = \text{Const.}$$

Et si huius fractionis ponatur.

$$\text{numerator } (3 + 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{2}{5}} + 25c^2x^{-\frac{2}{5}} = P, \text{ et}$$

$$\text{denominator } (3 - 15cx^{\frac{1}{5}} + 25ccx^{\frac{2}{5}})y + 5ccx^{-\frac{2}{5}} - 25c^2x^{-\frac{2}{5}} = Q,$$

erit diuisor aequationem propositam integrabilem reddens
= PQ.

Casus 6. quo $n = \frac{3}{5}$.

79. Pro hac ergo aequatione $dy + yydx - ccx^{-\frac{12}{5}}dx = 0$,
erit $B = \frac{2}{5c}$; et $C = \frac{B}{5c} = \frac{2}{25c^2}$; $D = 0$ etc. hincque
integrale particulare prodit:

$$y = \frac{cx^{-\frac{6}{5}} + 15ccx^{-\frac{2}{5}} + 12ccx^{-\frac{6}{5}} + 3}{25ccx^{\frac{2}{5}} + 15cx^{\frac{4}{5}} + 3x} \text{ seu}$$

$$y = \frac{25c^2x^{-\frac{2}{5}} + 30ccx^{-\frac{2}{5}} + 15cx^{-\frac{1}{5}} + 3}{25ccx^{\frac{2}{5}} + 15cx^{\frac{4}{5}} + 3x} = v$$

vnde

AEQUATIONVM DIFFERENTIALIVM. 51

unde integrale completum obtinetur :

$$e^{10cx^{\frac{1}{5}}}. \frac{(3x-15cx^{\frac{4}{5}}+25ccx^{\frac{3}{5}})y-3+15cx^{\frac{-1}{5}}-30ccx^{\frac{-2}{5}}+25c^2x^{\frac{-3}{5}}}{(3x+15cx^{\frac{4}{5}}+25ccx^{\frac{3}{5}})y-3-15cx^{\frac{-1}{5}}-30ccx^{\frac{-2}{5}}-25c^2x^{\frac{-3}{5}}} = \text{Const.}$$

Ac neglecto factore exponentiali $e^{10cx^{\frac{1}{5}}}$, productum ex numeratore et denominatore praebebit diuisorem, per quem aequatio proposita diuisa euadit integrabilis.

Problema 12.

80. Denotante i numerum quemcunque integrum, exhibere resolutionem huius aequationis :

$$dy + ydx - ccx^{\frac{-i}{2i+1}} dx = 0.$$

Solutio.

Cum igitur fit $n = \frac{i}{2i+1}$, reperietur

$$B = -\frac{(i+1)i}{2(2i+1)c} A$$

$$C = +\frac{(i+2)(i+1)i(i-1)}{2 \cdot 4(2i+1)^2 c^2} A$$

$$D = -\frac{(i+3)(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6(2i+1)^3 c^3} A$$

$$E = +\frac{(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)(i-1)(i-2)(i-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8(2i+1)^4 c^4} A$$

etc.

tum vero integrale particulare erit :

$$y = cx^{\frac{-i}{2i+1}} + \frac{i}{2i+1} Ax^{\frac{-i-1}{2i+1}} + \frac{i-1}{2i+1} Bx^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \frac{i-2}{2i+1} Cx^{\frac{-i-3}{2i+1}} + \frac{i-3}{2i+1} Dx^{\frac{-i-4}{2i+1}} + \text{etc.}$$

$$\frac{i}{2i+1} Ax^{\frac{-i-1}{2i+1}} + \frac{i-1}{2i+1} Bx^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \frac{i-2}{2i+1} Cx^{\frac{-i-3}{2i+1}} + \frac{i-3}{2i+1} Dx^{\frac{-i-4}{2i+1}} + \text{etc.}$$

G 2

quod

quod ut ad eundem denominatorem reducatur, statuamus:

$$\mathcal{A} = cA$$

$$\mathcal{B} = -\frac{i(i-1)}{2(2i+1)}A$$

$$\mathcal{C} = +\frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2 \cdot 4 \cdot (2i+1)^2 c}A$$

$$\mathcal{D} = -\frac{(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)(i-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2i+1)^3 c^2}A$$

etc.

unde fiet:

$$y = \frac{\mathcal{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathcal{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} + \mathcal{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathcal{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} + \text{etc.}}{\mathcal{A}x^{\frac{i}{2i+1}} + \mathcal{B}x^{\frac{i-1}{2i+1}} + \mathcal{C}x^{\frac{i-2}{2i+1}} + \mathcal{D}x^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.}}$$

Ponamus porro breuitatis gratia:

$$Ax^{\frac{i}{2i+1}} + Bx^{\frac{i-1}{2i+1}} + Cx^{\frac{i-2}{2i+1}} + Dx^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = P$$

$$Ax^{\frac{i}{2i+1}} - Bx^{\frac{i-1}{2i+1}} + Cx^{\frac{i-2}{2i+1}} - Dx^{\frac{i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = Q$$

$$\mathcal{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathcal{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} + \mathcal{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathcal{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} + \text{etc.} = \mathcal{P}$$

$$-\mathcal{A}x^{\frac{-i}{2i+1}} + \mathcal{B}x^{\frac{-i-1}{2i+1}} - \mathcal{C}x^{\frac{-i-2}{2i+1}} + \mathcal{D}x^{\frac{-i-3}{2i+1}} - \text{etc.} = \mathcal{Q}$$

atque integrale completum erit:

$$e^{-2(2i+1)cx^{\frac{i+1}{2i+1}}} \frac{Qy - \mathcal{Q}}{Py - \mathcal{P}} = \text{Const.}$$

Tum vero diuisor, aequationem propositam reddens integrabilem, erit $= (Py - \mathcal{P})(Qy - \mathcal{Q})$.

Coroll. I.

81. Quodsi ergo in aequatione $dy + ydx + ax^{\frac{-i}{2i+1}}$
 $dx = 0$ coefficientis a fuerit quantitas negativa, ut posito
 $a =$

$\alpha = -cc$, sit c quantitas realis, integrale completum hic inuentum formam habet realem, et quouis casu facile exhiberi potest, pariter ac diuisor, qui aequationem integrabilem reddit.

Coroll. 2.

82. At si α fuerit quantitas positina, puta $\alpha = aa$, vt habeatur haec aequatio: $dy + yydx + aax^{\frac{-1}{2i+1}}dx = 0$, erit $c = a\sqrt{-1}$, et coefficientes B, D, F etc. et \mathfrak{A} , \mathfrak{C} , \mathfrak{E} etc. fient imaginarii; vnde valores particulares $y = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{F}}$ et $y = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{G}}$ prodibunt imaginarii.

Coroll. 3.

83. Hoc tamen casu, quo $c = a\sqrt{-1}$ et $cc = -aa$, fient $P + Q$ et $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ quantitates reales, at $P - Q$ et $\mathfrak{P} - \mathfrak{Q}$ imaginariae. Quodsi ergo ponatur

$$P + Q = 2R; P - Q = 2S\sqrt{-1}; \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{R}$$

$$\text{et } \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

erunt R, S, \mathfrak{R} et \mathfrak{S} quantitates reales, et ob

$$P = R + S\sqrt{-1}; Q = R - S\sqrt{-1}; \mathfrak{P} = \mathfrak{R} + \mathfrak{S}\sqrt{-1};$$

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{R} - \mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

fiet diuisor, reddens aequationem integrabilem,

$$(RR + SS)yy - 2(R\mathfrak{R} + S\mathfrak{S})y + \mathfrak{R}\mathfrak{R} + \mathfrak{S}\mathfrak{S}$$

idcoque realis.

Coroll. 4.

84. At eodem casu $e = a\sqrt{-1}$, ob $e^{-p\sqrt{-1}} = \cos p\sqrt{-1}$ fin. p , erit $e^{-2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}}\sqrt{-1}} = \cos 2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}}$ fin. $2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}}$; unde posito breuitatis gratia $2(2i+1)ax^{\frac{1}{2i+1}} = p$, erit integrale completum:

$(\cos p\sqrt{-1} \text{ fin. } p) \cdot \frac{(R - S\sqrt{-1})y - N + S\sqrt{-1}}{(R + S\sqrt{-1})y - N - S\sqrt{-1}} = \text{Const.}$
 quae forma est imaginaria.

Coroll. 5.

85. Tribuatur autem constanti talis forma: $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, et aequatione integrâli euoluta, erit:

$$\begin{aligned} (Ry - N) \cos p - (Ry - N) \sin p\sqrt{-1} - (Sy - S) \cos p\sqrt{-1} - (Sy - S) \sin p \\ \beta\sqrt{-1} + (Sy - S) \alpha\sqrt{-1} + (Sy - S) \beta. \end{aligned}$$

Iam aequentur seorsim partes reales et imaginariae:

$$\begin{aligned} (Ry - N) \cos p - (Sy - S) \sin p &= \alpha(Ry - N) + \beta(Sy - S) \\ (Ry - N) \sin p + (Sy - S) \cos p &= \beta(Ry - N) - \alpha(Sy - S) \end{aligned}$$

quae duae aequationes conueniunt, si modo sit $\alpha\alpha + \beta\beta = 1$. Sit ergo $\alpha = \cos \zeta$, et $\beta = \sin \zeta$, prodibitque ex utraque

$$\frac{Ry - N}{Sy - S} = \frac{\sin p + \sin \zeta}{\cos p - \cos \zeta} = \cot. \frac{\zeta - p}{2}.$$

Coroll. 6.

Coroll. 6.

86. Sumto ergo pro ζ angulo quocunque, si sit $\zeta = a\sqrt{-1}$, erit integrale completum aequationis propositae

$$\frac{Ry - \mathfrak{N}}{Sy - \mathfrak{S}} = \cot. \frac{\zeta - p}{2}$$

$$\text{seu } y = \frac{\mathfrak{N} \sin. \frac{\zeta - p}{2} - \mathfrak{S} \cos. \frac{\zeta - p}{2}}{R \sin. \frac{\zeta - p}{2} - S \cos. \frac{\zeta - p}{2}}$$

existente $p = 2(2i + 1)ax^{\frac{1}{2i+1}}$.

Problema 13.

87. Denotante i numerum quemcunque integrum, exhibere resolutionem huius aequationis:

$$dy + yydx - ccx^{\frac{-i}{2i-1}}dx = 0.$$

Solutio.

Quia est $n = \frac{i}{2i-1}$, haec resolutio deriuari potest ex solutione praecedentis problematis, ponendo $-i$ loco i . Quare tribuantur litteris B, C, D, etc. sequentes valores:

$$B = + \frac{i(i-1)}{2(2i-1)c} A$$

$$C = + \frac{(i+1)i(i-1)(i-2)}{2 \cdot 4 (2i-1)^2 c^2} A$$

$$D = + \frac{(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)(i-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2i-1)^3 c^3} A$$

etc.

Turn

56 DE INTEGRATIONE

Tum vero alterarum litterarum \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} etc. determinatio ita se habebit:

$$\mathfrak{A} = c A$$

$$\mathfrak{B} = + \frac{(i+1)i}{2(2i-1)} A$$

$$\mathfrak{C} = + \frac{(i+2)(i+1)i(i-1)}{2 \cdot 4 (2i-1)^2 c} A$$

$$\mathfrak{D} = + \frac{(i+3)(i+2)(i+1)i(i-1)(i-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 (2i-1)^3 c^2} A$$

etc.

Quibus valoribus constitutis, ponatur brevitatis gratia:

$$A x^{\frac{i}{2i-1}} + B x^{\frac{i+1}{2i-1}} + C x^{\frac{i+2}{2i-1}} + D x^{\frac{i+3}{2i-1}} + \text{etc.} = P$$

$$A x^{\frac{i}{2i-1}} - B x^{\frac{i+1}{2i-1}} + C x^{\frac{i+2}{2i-1}} + D x^{\frac{i+3}{2i-1}} + \text{etc.} = Q$$

$$\mathfrak{A} x^{\frac{-i}{2i-1}} + \mathfrak{B} x^{\frac{-i+1}{2i-1}} + \mathfrak{C} x^{\frac{-i+2}{2i-1}} + \mathfrak{D} x^{\frac{-i+3}{2i-1}} + \text{etc.} = \mathfrak{P}$$

$$-\mathfrak{A} x^{\frac{-i}{2i-1}} + \mathfrak{B} x^{\frac{-i+1}{2i-1}} - \mathfrak{C} x^{\frac{-i+2}{2i-1}} + \mathfrak{D} x^{\frac{-i+3}{2i-1}} - \text{etc.} = \mathfrak{Q}$$

atque hinc statim habentur duae integrationes particulares:

$$\text{I. } y = \frac{\mathfrak{P}}{P}, \text{ et II. } y = \frac{\mathfrak{Q}}{Q}.$$

Tum vero aequatio integralis completa erit:

$$e^{2(2i-1)cx^{\frac{-1}{2i-1}}} \frac{Qy - \mathfrak{Q}}{Py - \mathfrak{P}} = \text{Const.}$$

et diuisor aequationem propositam integrabilem reddens, fiet $=(Py - \mathfrak{P})(Qy - \mathfrak{Q})$.

Coroll.

Coroll. 1.

88. Quodsi autem aequatio proposita fuerit huiusmodi :

$$dy + yy dx + aa x^{\frac{-+1}{2i-1}} dx = 0.$$

vt sit $cc = -aa$, et $c = a\sqrt{-1}$, integrationes particulares exhibitae fient imaginariae, ob B, D, F, etc. item \mathfrak{M} , \mathfrak{C} , \mathfrak{S} etc. imaginarias, dum reliquarum litterarum valores sunt reales.

Coroll. 2.

89. At si ponatur :

$$P + Q = 2R; P - Q = 2S\sqrt{-1}; \mathfrak{P} + \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{M} \\ \text{et } \mathfrak{P} - \mathfrak{Q} = 2\mathfrak{S}\sqrt{-1}$$

quantitates R, S, \mathfrak{M} et \mathfrak{S} nihilo minus fient, vt ante, reales, et diuisor aequationem reddens integrabilem erit :

$$(RR + SS)yy - 2(R\mathfrak{M} + S\mathfrak{S})y + \mathfrak{M}\mathfrak{M} + \mathfrak{S}\mathfrak{S}.$$

Coroll. 3.

90. Tum vero, si ponatur breuitatis causa $2(2i-1)$

$ax^{\frac{-1}{2i-1}} = p$, aequatio integralis completa erit:

$$\frac{Ry - \mathfrak{M}}{S.y - \mathfrak{S}} = \cot. \frac{\zeta + p}{2}$$

vnde elicitur :

$$y = \frac{\mathfrak{M} \sin. \frac{\zeta + p}{2} - \mathfrak{S} \cos. \frac{\zeta + p}{2}}{R \sin. \frac{\zeta + p}{2} - S. \cos. \frac{\zeta + p}{2}}$$

vbi angulus ζ vicem gerit constantis arbitariae.

Tom. VIII. Nou. Comm.

H

Scholion.

Scholion.

91. Solutiones horum duorum postremorum problematum non tam per accuratam analysin sunt euolutae, quam per inductionem ex casibus particularibus supra expeditis deriuatae, quandoquidem progressio ab his casibus ad sequentes satis erat manifesta. Fundamentum autem harum solutionum in hoc potissimum est fitum, quod solutio particularis, unde omnia sunt deducta, re vera est geminata, cum quantitas c , cuius quadratum tantum in aequatione differentiali occurrit, aequae negative, ac positive, accipi possit. Quoties autem huiusmodi aequationum binae solutiones particulares sunt cognitae, ex iis multo facilius solutio generalis, indeque multiplicatores, eas integrabiles reddentes, erui possunt, id quod operae pretium erit clarius exposuisse.

Problema 14.

92. Datis duabus solutionibus particularibus huiusmodi aequationis :

$$dy + P y dx + Q y y dx + R dx = 0$$

inuenire eius solutionem generalem, et multiplicatorem, qui eam integrabilem reddat.

Solutio.

Sint M et N huiusmodi functiones ipsius x , quae loco y substitutae, ambae aequationi propositae satisficiant, ita ut sit :

$$\begin{aligned} dM + PM dx + Q M^2 dx + R dx &= 0 \\ \text{et } dN + PN dx + Q N^2 dx + R dx &= 0. \end{aligned}$$

Ponatur

Ponatur $\frac{y-M}{y-N} = z$, seu $y = \frac{M-Nz}{1-z}$, erit

$$dy = \frac{dM - zdM + Mdz - Ndz - zdN + zNdz}{(1-z)^2}$$

quibus valoribus in aequatione proposita substitutis, et tota aequatione per $(1-z)^2$ multiplicata, prodibit :

$$(1-z)dM - z(1-z)dN + (M-N)dz + P(1-z)Mdx - P(1-z)Nzdx \\ + QMMdx - 2QMNzdx + QNNzdx + R(1-z)^2dx = 0.$$

Iam pro dM et dN substituantur valores ex binis superioribus aequationibus differentialibus oriundi :

$$-P(1-z)Mdx - Q(1-z)M^2dx - R(1-z)dx \\ + Pz(1-z)Ndx + Qz(1-z)N^2dx + Rz(1-z)dx + (M-N)dz = 0 \\ + P(1-z)Mdx + QM^2dx + R(1-z)^2dx \\ - Pz(1-z)Ndx - 2QMNzdx \\ + QN^2zdx$$

qua aequatione in ordinem redacta, orietur :

$$QzM^2dx + QzN^2dx - 2QMNzdx + (M-N)dz = 0$$

seu $Q(M-N)dx + \frac{d}{dz} = 0$, ita ut fit :

$$z = Ce^{-\int Q(M-N)dx}$$

unde aequatio integrata generalis erit :

$$e^{\int Q(M-N)dx} \frac{y-M}{y-N} = \text{Const.}$$

Pro multiplicatore autem inueniendo, notetur, aequationem propositam, facta substitutione primum per $(1-z)^2$, esse multiplicatam, tum vero diuisam per $z(M-N)$, euasisse integrabilem. Statim ergo per $\frac{(1-z)^2}{(M-N)z}$ multiplicata fiet integrabilis : ex quo factor erit $\frac{(1-z)^2}{(M-N)z}$, qui ob $z = \frac{y-M}{y-N}$ hanc induet formam :

$$\frac{M-N}{(y-M)(y-N)}.$$

Problema 15.

93. Proposita aequatione $y dy + Py dx + Q dx = 0$, inuenire conditiones functionum P et Q , vt huiusmodi multiplicator $(y + M)^n$ eam reddat integrabilem.

Solutio.

Ex natura ergo differentialium esse oportet:

$$\frac{1}{dx} d. y(y + M)^n = \frac{1}{dy} d. (Py + Q)(y + M)^n$$

vnde cum M sit functio ipsius x tantum, erit

$$ny(y + M)^{n-1} \frac{dM}{dx} = P(y + M)^n + n(Py + Q)(y + M)^{n-1}$$

quae diuisa per $(y + M)^{n-1}$ abit in hanc:

$$\frac{ny \frac{dM}{dx}}{dx} = (n + 1)Py + PM + nQ$$

vnde necesse est sit:

$$P = \frac{n \frac{dM}{dx}}{(n + 1)dx} \quad \text{et} \quad Q = \frac{-PM}{n} = -\frac{M \frac{dM}{dx}}{(n + 1)dx}$$

His igitur valoribus substitutis aequatio

$$y dy + \frac{ny \frac{dM}{dx}}{n + 1} - \frac{M \frac{dM}{dx}}{n + 1} = 0$$

fit integrabilis, si multiplicetur per $(y + M)^n$.

Coroll. 1.

94. Quia haec aequatio est homogenea, ea quoque fit integrabilis, si diuidatur per $(n + 1)yy + nyM - M \frac{dM}{dx} = (y + M)((n + 1)y - M)$. Neque ergo hinc nouae aequationes methodo hac tractabiles obtinentur.

Coroll. 2.

95. Quoniam autem habemus duos multiplicatores $(y + M)^n$ et $\frac{1}{(y + M)((n + 1) - M)}$: si alter per alterum

AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM. 61

rum diuidatur, quoties constanti arbitrariae aequatus dabit integrale completum. Quare aequatio $y dy + \frac{ny dM}{n+1} - \frac{M dM}{n+1} = 0$ generaliter integrata praebet:

$$(y+M)^{n+1}((n+1)y-M) = \text{Const.}$$

Problema 16.

96. Proposita aequatione $y dy + Py dx + Q dx = 0$, inuenire conditiones functionum P et Q, vt huiusmodi multiplicator $(yy + My + N)^n$ eam reddat integrabilem.

Solutio.

Ex natura differentialium fit necesse est:

$$\frac{1}{dx} d.y(yy + My + N)^n = \frac{1}{dx} d.(Py + Q)(yy + My + N)^n$$

Cum igitur M, N, P et Q sint per hypothesin functiones ipsius x, erit, facta euolutione:

$$ny(yy + My + N)^{n-1}(\frac{dy}{dx} + \frac{dM}{dx}) = P(yy + My + N)^n + n(Py + Q)(2y + M)(yy + My + N)^{n-1}$$

et post diuisionem per $(yy + My + N)^{n-1}$

$$ny\frac{dy}{dx} + \frac{nydM}{dx} = (2n+1)Py + (n+1)PM + PN + 2nQy + nQM$$

Hinc fieri oportet:

$$\text{I. } ndM = (2n+1)Pdx$$

$$\text{II. } ndN = (n+1)PMdx + 2nQdx$$

$$\text{III. } 0 = PN + nQM$$

Prima dat $P = \frac{ndM}{(2n+1)dx}$, et vltima $Q = \frac{-PN}{nM}$,

feu $Q = \frac{-N dM}{(2n+1)M dx}$, qui valores in media substituti praebent;

$$n dN = \frac{n(n+1)M dM}{2n+1} - \frac{2nN dM}{(2n+1)M} \text{ feu}$$

$$(2n+1)M dN + 2N dM = (n+1)MM dM$$

quae multiplicata per $M^{\frac{-2n+1}{2n+1}}$ et integrata praebet:

$$(2n+1)M^{\frac{2}{2n+1}}N = \text{Const.} + (n+1) \int M^{\frac{2n+2}{2n+1}} dM$$

$$\text{feu } (2n+1)M^{\frac{2}{2n+1}}N = \text{Const.} + \frac{2n+1}{4} M^{\frac{4n+4}{2n+1}},$$

$$\text{vnde fit } N = a M^{\frac{-2}{2n+1}} + \frac{1}{4} M^2,$$

Cum ergo sit

$$P dx = \frac{n dM}{2n+1} \text{ et } Q dx = -\frac{a M^{\frac{-2n-2}{2n+1}} dM}{2n+1} - \frac{M dM}{4(2n+1)}$$

ista aequatio differentialis;

$$y dy + \frac{ny dM}{2n+1} - \frac{M dM}{4(2n+1)} - \frac{a}{2n+1} M^{\frac{-2n-2}{2n+1}} dM = 0$$

integrabilis redditur, si multiplicetur per

$$(yy + My + \frac{1}{4}M^2 + aM^{\frac{-2}{2n+1}})^n.$$

Coroll. 1.

97. Si fuerit $-\frac{2n-2}{2n+1} = 1$, feu $n = -1$; aequatio differentialis est homogenea, et si $-\frac{2n-2}{2n+1} = 0$ feu $n = -\frac{1}{2}$, primi gradus. Vtroque autem casu nulla est difficultas, cum aequatio facile tractari possit.

Coroll.

Coroll. 2.

98. Magis ergo abstrusi erunt casus, quibus exponens $-\frac{2n-s}{2n+1}$ neque est 0, neque 1. Sit ergo $-\frac{2n-s}{2n+1} = m$, unde fit $2n = -\frac{m-s}{m+1}$ et aequatio differentialis $ydy + \frac{1}{2}(m+3)y dM + \frac{1}{2}(m+1)M dM + \frac{1}{2}\alpha(m+1)M^m dM = 0$ integrabilis reddetur per multiplicatorem

$$(yy + My + \frac{1}{2}MM + \alpha M^{m+1})^{\frac{-m-s}{2(m+1)}}$$

Coroll. 3.

99. Quod si iam pro M functiones quaecunque ipsius x substituuntur, aequationes tam complicatae formari poterunt, quas quomodo aliis methodis tractari oporteat, vix liquet, cum tamen hac methodo earum resolutio sit in promptu.

Scholion.

100. Si quis haec vestigia ulterius proficui voluerit, dubium est nullum, quin haec methodus mox multo maiora sit acceptura incrementa, quibus uniuersa Analysis non mediocriter promoueatur. Specimina etiam hic euoluta ita sunt comparata, ut viam ad inuestigationes profundiores parare videantur, praecipue si insuper alia aequationum differentialium genera simili modo pertractentur. Verum haec, quae hactenus protuli, sufficere videntur, animis Geometrarum ad ampliorem huius methodi enucleationem incitandis, quem scopum mihi equidem potissimum proposueram.

SOLVTIO